ÜBER DIE STÜTZFUNKTIONEN DER RISIKOBEREICHE VON GEWISSEN TESTPROBLEMEN

Hermann Rost

1967

Über die Stützfunktionen der Risikobereiche von gewissen Testproblemen.

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Ludwig - Maximilians - Universität München

vorgelegt von

Hermann Rost

aus München

München, März 1967

Berichterstatter: Prof. Dr. H. Richter

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Juli 1967

Fotodruck: Mikrokopie GmbH, München 22, Bruderstraße 9

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung und Übersicht 3

§ 1. Likelihoodverteilungen 7

§ 2. Der Alternativtest von n Hypothesen bei Irrtumsschäden 16

§ 3. Der Fall zweier Hypothesen. 35

A. Irrtumsschäden 35

B. Beliebige Schäden 36

C. Eindeutigkeitsfragen 40

D. Rückwärtiger Rand des Risikobereichs bei Irrtumsschäden 45

§ 4. Sequentielle Verfahren 47

Literaturverzeichnis 63

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546019_0040

Einleitung und Übersicht.

Die dieser Arbeit zugrundeliegende Situation ist ein Entscheidungsproblem unter endlich vielen Hypothesen $H_1, H_2, \ldots H_n$. Die kompakte Menge $\mathfrak{Y}$ der möglichen Entscheidungen (bzw. der unter den einzelnen Hypothesen auftretenden Schäden) hänge dabei nicht vom Ergebnis des durchgeführten Versuchs ab. Unter diesen Voraussetzungen wird das Verhalten der Stützfunktion g von $\mathfrak{Y}$ und h von $\mathfrak{R}$ (= Menge der Risikovektoren; wegen der Bezeichnungen vgl. (1.1) bis (1.3)) untersucht.

Besitzt die beobachtete Variable mit Wertebereich Ω bezüglich eines Maßes $\tilde{\mu}$ die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_i(\omega)$ unter der Hypothese H_i, $i = 1,\ldots n$, so gilt bekanntlich (vgl. [9], S. 560)

$$(0.1) \qquad h(x) = \int_{\Omega} g(x \circ f(\omega))\, d\tilde{\mu}(\omega). \qquad ^{1)}$$

Ausgehend von dieser Gleichung ist es das Ziel der Arbeit, Funktionen h zu charakterisieren, die bei festem g in Abhängigkeit von $\tilde{\mu}$ und f auftreten können, sowie nach Eigenschaften von $\tilde{\mu}$ und f zu fragen, die aus (0.1) abgeleitet werden können. Das Interesse gilt dabei nur den Stützfunktionen der Bereiche $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{Y}$, der (Bayes-)Risikofunktion h und der Schadensfunktion g. Außer-

---

1) x,y usw. stehe für die n-Tupel $(x_1,\ldots x_n)$, $(y_1,\ldots y_n)$ usw., es bezeichne $x'y$ das Skalarprodukt $\sum_i x_i y_i$, sowie $x \circ y$ das n-Tupel $(x_1y_1,\ldots x_ny_n)$; weiter bedeute $x \leq y$ soviel wie $x_i \leq y_i$, $i = 1,\ldots n$.

dem werden diese Stützfunktionen nur an Argumentstellen x, $x \geqslant 0$, betrachtet entsprechend der Suche nach möglichst guten und nicht möglichst schlechten Entscheidungsfunktionen (Ausnahme : § 3, D). Auf die Frage, wie einzelne optimale Punkte in $\overline{\mathcal{R}}$, der konvexen Hülle von $\mathcal{R}$ durch Tests realisiert werden können, wird hier nicht eingegangen. Deshalb spielt die Atomlosigkeit des Maßes $\tilde{\mu}$ - im Gegensatz etwa zu [11] - keine Rolle.

Dabei wird folgendermaßen vorgegangen : In § 1 wird der für die Arbeit zentrale Begriff der Likelihoodverteilung entwickelt und ein einfacher Kalkül dieser Likelihoodverteilungen angegeben. Der § 2 ist der Charakterisierung der Funktionen h in (0.1) gewidmet, wenn g von der speziellen Gestalt g_o,

$$g_o(x) := \sum_i x_i - \max_i x_i \,, \tag{0.2}$$

ist. (Diese Schadensfunktion rührt von einem Schadensbereich her, der nur die Punkte $(0,1,..1)$, $(1,0,1,..1),\ldots(1,1,..,0)$ enthält, die als Entscheidungen für eine bestimmte Hypothese interpretiert werden können, wobei als Schaden nur 0 oder 1 auftritt, je nachdem ob man sich für die wahre oder eine falsche Hypothese entschieden hat.) In diesem Fall läßt sich eine einfache notwendige und hinreichende Bedingung gewinnen (Satz 2.3) für die Existenz geeigneter Dichten in einem Maßraum $(\Omega,\mathfrak{F},\tilde{\mu})$, so daß h eine Darstellung (0.1) besitzt. Die Dichten, $f_1,\ldots f_n$, haben außerdem die Eigenschaft, daß ihre Likelihoodverteilung - im Sinne von § 1 - eindeutig durch h in (0.1) bestimmt ist. Diese Eindeutig-

keitseigenschaft gestattet es, die Menge der Likelihoodverteilungen in einen geeigneten Funktionenraum einzubetten und sie mit einer dort erklärten Metrik, und damit topologischen Struktur, zu versehen. In diesem Sinne läßt sich dann in Satz 2.4 und 2.5 die stetige Abhängigkeit von h in (0.1) von f und $\tilde{\mu}$ zeigen.

Der § 3 behandelt im wesentlichen Besonderheiten, die den Fall $n = 2$ auszeichnen. In Teil A spezialisiert Satz 3.1 das Hauptergebnis von § 2, den Satz 2.3, auf den Fall $n = 2$, wobei jetzt die Bedingungen von Satz 2.3 eine besonders einfache Gestalt annehmen. Bei $n = 2$, $g = g_o$ können nämlich alle positiv homogenen konkaven Funktionen h, mit $0 \leq h \leq g_o$, als linke Seite in (0.1) auftreten. Anschließend wird in Teil B dieser Satz wieder verallgemeinert, und zwar wird für $n = 2$, g beliebig, eine Charakterisierung der in (0.1) möglichen h gegeben (Satz 3.2). Dabei wird diese Charakterisierung auf ein Problem der Faltung endlicher Maße in R zurückgeführt. Die Frage der Eindeutigkeit der Likelihoodverteilung von f und $\tilde{\mu}$ behandelt Teil C; eine Aussage wird, weil in größerer Allgemeinheit möglich, nicht nur für $n = 2$, aber für eine spezielle Klasse von Schadensfunktionen gemacht. Teil D zeigt eine weitere Eigentümlichkeit des 2 - Alternativentests : betrachtet man bei zugrundegelegter Schadensfunktion g_o ausnahmsweise einmal den rückwärtigen Rand von $\mathcal{R}$ ($= \{r \in \overset{\vee}{\mathcal{R}} : r'x = h(x)$ für ein $x \leq 0,\ x \neq 0\}$) oder - in unserer Betrachtungsweise - die Einschränkung von h auf $\{x : x \leq 0\}$, so wird nur im Falle $n = 2$ $^{\vee}\mathcal{R}$ bzw. h in seinem Gesamtverlauf durch diese Angabe bereits

festgelegt, im allgemeinen aber nicht bei $n>2$.

§ 4 hat als Gegenstand den Sequenztest mit unabhängigen Wiederholungen und konstanten Kosten pro Stufe. Ein einfaches Verfahren zum Berechnen der Bayesrisikofunktion wird angegeben : in einem geeigneten Raum von Stützfunktionen wird eine monotone Abbildung $\hat{p}$ (abhängig von der Likelihoodverteilung von $\tilde{\mu}$ und f) des Raumes in sich erklärt. Die Risikofunktion h_m des m-stufigen Tests ergibt sich durch m-maliges Anwenden von $\hat{p}$ auf die Schadensfunktion g (Satz 4.1), $m \in \mathbb{N}$. Weiter ist h_∞ Lösung der Integralgleichung

(0.3) $$\hat{p}(a) = a$$

und unter einer einfachen notwendigen und hinreichenden Zusatzbedingung die einzige Lösung (Satz 4.2 und 4.3).Eine Charakterisierung von h_∞ ist durch diese Sätze erreicht. Wie in § 2 läßt sich noch die stetige Abhängigkeit von h_m , $m \leq \infty$, von f und $\tilde{\mu}$ zeigen, wobei im Falle $m = \infty$ die gleiche Zusatzbedingung, die die eindeutige Lösbarkeit von (0.3) sicherstellt, als notwendig und hinreichend für die Stetigkeit von h_∞ auftritt (Satz 4.5 bis 4.7). Zuletzt wird noch eine Besonderheit des 2-Alternativentests im sequentiellen Fall gezeigt : zu einer Stützfunktion a gibt es höchstens eine Abbildung $\hat{p}$, die a als Fixpunkt besitzt.

§ 1. Likelihoodverteilungen.

Gegeben sei eine Menge Ω, eine σ-Algebra $\mathcal{F}$ von Teilmengen von Ω, sowie die auf $\mathcal{F}$ erklärten Wahrscheinlichkeitsmaße μ_i, $i = 1,\ldots n$, repräsentiert in der Form

$$(1.1) \qquad d\mu_i(\omega) = f_i(\omega)\, d\tilde{\mu}(\omega), \quad i = 1,\ldots n,$$

bezüglich eines festen Maßes $\tilde{\mu}$. Weiter sei gegeben eine kompakte Menge $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+^n$ [1], die als "Menge der möglichen Entscheidungen" interpretiert wird oder als "Menge der Schadensvektoren", weil man die i-Komponente von $s \in \mathcal{T}$ als "Schaden" bezeichnet, "der auftritt bei der Entscheidung s, falls μ_i die wahre Verteilung ist". Ein Test sei eine $\mathcal{F}$-meßbare Abbildung δ von Ω nach $\mathcal{T}$. Einem Test δ ist zugeordnet der Risikovektor $r(\delta)$ mit Komponenten

$$(1.2) \qquad r_i(\delta) := \int_{\Omega} \delta_i(\omega)\, d\mu_i(\omega), \qquad i = 1,..n.$$

Als Bayesrisiko von δ zu gegebener Vorbewertung $x = (x_1,..x_n)$ - wobei $x \geqslant 0$; auf die Normierung $\sum_i x_i = 1$ werde verzichtet - wird wie üblich der Ausdruck $x'r(\delta)$ eingeführt, weiter als Bayesrisiko schlechthin die Funktion

$$(1.3) \qquad h(x) := \inf_{\delta} x'r(\delta) \;, \; x \geqslant 0 \;.$$

Definiert man die Stützfunktion a einer beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ als $a(x) := \inf_{s \in A} x's$, so ist offensichtlich $h(x)$ in $\{x \geqslant 0\}$ die Stützfunktion des Risikobereichs $\mathcal{R} := \{r(\delta): \delta \text{ Test}\}$.

[1] $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n: x_i \geqslant 0, i = 1,..n\}$

Als vorderen Rand von ${}^{K}\mathcal{R}$, auf den es im folgenden fast ausschließlich ankommen wird, bezeichnen wir die Menge aller r aus der abgeschlossenen konvexen Hülle von $\mathcal{R}$, für die $x'r = h(x)$ für ein $x \geqq 0$, $x \neq 0$, gilt. Entsprechend dem hauptsächlichen Interesse für den vorderen Rand werde, soweit nicht ausdrücklich anders vermerkt, im folgenden jede Stützfunktion als nur in $\mathbb{R}^n_+$ definiert angesehen.

Man wird nun vermuten, daß bei gegebenem $\mathcal{T}$ wesentliche Eigenschaften von $\mathcal{R}$ - jedenfalls solche, die sich durch die Stützfunktion h ausdrücken lassen - nur von der gemeinsamen Verteilung der Quotienten f_i/f_k , $i,k = 1,\ldots n$, bezüglich geeigneter Maße abhängen. Zum Beweis dieser Vermutung und zu ihrer Präzisierung seien folgende Begriffe eingeführt :

Definition 1.1 a) das n-eckige Einheitssimplex S_n (oder S , wenn keine Verwechslung möglich ist),

$$S_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_i x_i = 1 \right\}; \tag{1.4}$$

b) in $(\Omega, \mathcal{F})$ das Maß

$$\mu := \sum_i \mu_i ; \tag{1.5}$$

c) die meßbare Abbildung $P : \Omega \longrightarrow S_n$ mit Komponenten

$$P_i(\omega) := f_i(\omega) / \sum_j f_j(\omega) , \quad i = 1,..n; \tag{1.6}$$

d) auf den Borelschen Teilmengen von S_n die von

P induzierten Maße

(1.7) $$p_i := \mu_i \circ P^{-1} \quad , \; i = 1,\ldots n,$$

(1.8) $$p := \mu \circ P^{-1}.$$

Bemerkung: Da im folgenden das Maß μ eine entscheidende Rolle spielt und daher μ-Nullmengen vernachlässigt werden, sind auch die in (1.6) gebildeten Quotienten sinnvoll, da sie μ-fast überall erklärt sind.

Wir sind jetzt in der Lage, die Beziehung (0.1) zwischen der Stützfunktion g von $\mathfrak{T}$ und der Stützfunktion h von $\mathcal{R}$ umzuformen:

(1.9) $$h(x) = \int_{\Omega \cap \{f \neq 0\}} g(x \circ f)\, d\tilde{\mu} = \int_{\Omega} g(x \circ P)\, d\mu = \int_{S} g(x \circ t)\, dp(t)$$

Gleichung (1.9) bedeutet aber, daß man bei Kenntnis von g und h Eigenschaften von f und $\tilde{\mu}$ nur insoweit feststellen kann, als sie durch p ausdrückbar sind. Wir können uns daher im folgenden, falls es zweckmäßig ist, auf die "Standarddarstellung" des Problems beschränken mit $\Omega = S$, $f_i(t) = t_i$, $i = 1,..n$. In diesem Falle ist wegen $\sum_i t_i = 1$ weiter $\tilde{\mu} = \mu = p$. Eindeutigkeitsaussagen bezüglich $\tilde{\mu}$ und f gelten auch immer nur in dieser Standarddarstellung.

Eine unmittelbare Folge von (1.4) bis (1.8) ist :

(1.10) $$p_i(S) = 1 \qquad \text{und} \qquad dp_i = t_i \cdot dp \;, \; i = 1,\ldots n.$$

Diese Eigenschaften seien zusammengefaßt in der Definition einer Likelihoodverteilung :

Definition 1.2 : Als n-dimensionale Likelihoodverteilung (LV) werde verstanden ein Maß p auf den Borelschen Mengen in S_n, für welches

$$\int_{S_n} t_i \, dp = 1 \,, \quad i = 1,\ldots n. \tag{1.11}$$

Jeder LV p sind gemäß (1.10) n normierte Maße $p_1,..p_n$ zugeordnet. Das in (1.8) definierte p heiße die LV der Maße $\mu_1,..\mu_n$. $\mathcal{L}_n$ (oder $\mathcal{L}$, wenn keine Verwechslung zu befürchten ist) sei die Menge aller n-dimensionalen Likelihoodverteilungen.

Die eingangs geäußerte Vermutung kann jetzt dahingehend beantwortet werden, daß nach (1.9) h nur von der LV von $\mu_1,\ldots\mu_n$ abhängt.

Jedem $p \in \mathcal{L}_n$ kann ein linearer Operator zugeordnet werden, der in folgendem Funktionenraum wirkt :

Definition 1.3 a) $\mathcal{K}_n := \{ a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n) : a(\lambda x) = \lambda a(x),\ \lambda \geq 0, x \in \mathbb{R}_+^n \}$.

$\mathcal{K}_n$ (oder wieder kurz $\mathcal{K}$) ist in natürlicher Weise isomorph dem Raum $\mathcal{C}(S_n)$; es läßt sich daher in $\mathcal{K}$ die Norm einführen :

b) $$\| a \| := \sup_{x \in S} |a(x)|, \quad a \in \mathcal{K}. \tag{1.12}$$

c) Jedem $p \in \mathcal{L}$ ist eine lineare Abbildung $\check{p}$ von $\mathcal{K}$ in sich zugeordnet gemäß

$$(\check{p}(a))(x) := \int_S a(x \circ t) \, dp(t) \,, \quad x \in \mathbb{R}_+^n \,. \tag{1.13}$$

Die Linearität von $\check{p}$ ist offensichtlich, ebenso, daß mit a auch $\check{p}(a)$ in $\mathcal{K}$ liegt und daß aus $a \geq 0$ folgt $\check{p}(a) \geq 0$. Weitere Eigenschaften des Operators $\check{p}$ sind Gegenstand der folgenden Lemmata :

Lemma 1.1 : Jedem $p \in \mathcal{L}$ und $x \in S$ ist ein positives Maß p_x zugeordnet, das in S definiert ist und die Masse 1 besitzt, durch

$$(1.14) \qquad \int_S a(t)\, dp_x(t) := (\check{p}(a))(x) , \quad a \in \mathcal{K} .$$

Beweis : Da jedes $b \in \mathcal{C}(S)$ Einschränkung auf S genau einer Funktion aus $\mathcal{K}$ ist, erklärt (1.14) auch auf $\mathcal{C}(S)$ ein Funktional, das offensichtlich linear und positiv ist. Zur Berechnung seiner Masse betrachten wir die Funktion $b_o(t) := \sum_i t_i$; dann ist für $x \in S$

$$(1.15) \quad p_x(S) = \int_S 1 \cdot dp_x = \int_S b_o(t)\, dp_x = (\check{p}(b_o))(x) =$$

$$= \int_S (\textstyle\sum_i x_i t_i)\, dp(t) = \sum_i x_i = 1 .$$

Aus dem Lemma folgt noch als

Corollar : $\check{p}$ ist eine Kontraktion in $\mathcal{K}$ bezüglich der Norm (1.12).

Beweis :

$$|(\check{p}(b))(x)| = \left|\int_S b(t)\, dp_x\right| \le \|b\| , \; x \in S,$$

somit $\quad \|\check{p}(b)\| \le \|b\| .$

Lemma 1.2 : Sei $a \in \mathcal{K}$; dann ist die Schar der Funktionen $\{\check{p}(a) : p \in \mathcal{L}\}$, eingeschränkt auf S , gleichgradig stetig.

Beweis : Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für $x, y \in B := \mathbb{R}^n_+ \cap \{u : \sum_i u_i \le 1\}$ gilt

$$(1.16) \qquad \textstyle\sum_i |x_i - y_i| < \delta \;\Rightarrow\; |a(x) - a(y)| < \varepsilon/n .$$

Sei nun für $x, y \in S$ die Prämisse in (1.16) erfüllt; dann ist auch

zu $t \in S$ (1.16) auf $x \circ t$, $y \circ t$ anwendbar, somit

$$|a(x \circ t) - a(y \circ t)| < \varepsilon/n \,. \tag{1.17}$$

p-Integration von (1.17) ergibt die nachstehende Abschätzung, in der x und y unabhängig von p gewählt waren :

$$|(\overset{\vee}{p}(a))(x) - (\overset{\vee}{p}(a))(y)| < \varepsilon \quad , \text{ w.z.b.w.}$$

Lemma 1.3 : Genüge $a \in \mathfrak{K}$ den Ungleichungen

$$\text{a) } a \gneqq 0 \qquad \text{b) } a(x+y) \geqq a(x) + a(y) \,, \; x,y \in \mathbb{R}^n_+ \,. \tag{1.18}$$

Dann erfüllt auch $b := \overset{\vee}{p}(a)$ (1.18), und außerdem ist $b \leqq a$.

Beweis : Die erste Aussage folgt durch Integration der Ungleichungen (1.18), die zweite aus der Konkavität von $a(x \circ .)$ und der Ungleichung von Jensen (vgl. etwa [8], S. 52):

$$b(x) = \int_S a(x \circ t)\, dp(t) \leqq a(x \circ e) \,,$$

wobei e die Komponenten $e_i := \int_S t_i \, dp = 1$ besitze.

Definition 1.4 : Gegeben zwei Likelihoodverteilungen, p^1 und p^2. Man betrachtet in $S \times S$ das Maßprodukt $\tilde{\mu} := p^1 \times p^2$, sowie die normierten Maße μ_i, erklärt durch $d\mu_i := t_i^1 \cdot t_i^2 \, d\tilde{\mu}$, $i = 1,\ldots n$. Sei p die LV der Maße μ_i, so heißt p Produkt von p^1 und p^2, geschrieben ebenso wie das Maßprodukt in der Form

$$p = p^1 \times p^2 \,. \tag{1.19}$$

Natürlich ist diese Produktbildung kommutativ; weiter gilt das

Lemma 1.4 : Sei $b \in \mathcal{K}$, p^1 und $p^2 \in \mathcal{L}$, $p = p^1 \times p^2$; dann ist

$$\overset{\vee}{p}(b) = \overset{\vee}{p}^1(\overset{\vee}{p}^2(b)) = \overset{\vee}{p}^2(\overset{\vee}{p}^1(b)) . \tag{1.20}$$

Beweis : $$(\overset{\vee}{p}^1(\overset{\vee}{p}^2(b)))(x) = \int_S \left[\int_S b(x \circ t^1 \circ t^2)\, dp^2 \right] dp^1 =$$

$$\int_S b(x \circ t)\, dp = (\overset{\vee}{p}(b))(x)$$

nach der selben Schlußweise, die auch in der Umformung von (1.9) angewandt wurde. Die Kommutativität der Produktbildung zieht die volle Behauptung nach sich.

Eine Eigenschaft des in Lemma 1.1 betrachteten Maßes p_x werde im Hinblick auf spätere Überlegungen noch festgehalten:

Lemma 1.5 : Wenn das Maß p_x die Masse 1 im Punkt x konzentriert, so gilt :

$$(\overset{\vee}{p}(a))(y) = a(y) , \quad a \in \mathcal{K} , \; y \in S_x , \tag{1.21}$$

$$\text{wobei } S_x := \{ y \in S : (x_i = 0 \Rightarrow y_i = 0) \} .$$

Beweis : Jedes $y \in S_x$ ist von der Form $y = x \circ t$, $t \in \mathbb{R}^n_+$. Für die Funktion $b(u) := a(t \circ u)$ lauten (1.13) und (1.14) :

$$(\overset{\vee}{p}(a))(y) = \int_S a(y \circ v)\, dp(v) = \int_S a(x \circ t \circ v)\, dp(v) = \int_S b(x \circ v)\, dp(v)$$

$$= \int_S b(u)\, dp_x(u) = b(x) \left[\text{nach Voraussetzung}\right] = a(t \circ x) = a(y) .$$

Ein wichtiger Hilfssatz, der im nächsten Paragraphen eine Rolle spielen wird, betrifft die Konstruktion einer LV aus gewissen vorgegebenen Daten :

Gegeben sei in $\mathbb{R}_+^n$ die Zentralprojektion Z_i durch den Punkt 0 von der Hyperebene $K_i := \{x : x_i = 1\}$ nach S ;

$$Z_i(K_i) = S \cap \{t_i > 0\}, \quad i = 1,\ldots n. \tag{1.22}$$

Sei in K_i das normierte Maß φ_i gegeben; dann ist

$$p_i' := \varphi_i \circ Z_i^{-1}, \quad i = 1,\ldots n, \tag{1.23}$$

ein normiertes Maß in S. Dann gilt das Lemma :

Lemma 1.6a : Es gibt eine LV p derart daß $p_i' = p_i$, $i = 1,..n$, wenn gilt :

$$t_i^{-1} dp_i' = t_j^{-1} dp_j' \quad \text{in } S \cap \{t_i, t_j > 0\},\ 1 \le i,j \le n,\ i \ne j. \tag{1.24}$$

Beweis : Man definiert in S das Maß p lokal durch $dp := t_i^{-1} dp_i'$; dies ist möglich, da in S nicht alle t_i gleichzeitig verschwinden, und wegen (1.24) auch widerspruchsfrei. Weiter ist für $i \le n$:

$$\int_S t_i \, dp = \int_{\{t_i > 0\}} t_i \, dp = \int_S dp_i' = \varphi_i(K_i) = 1 ,$$

d.h. p ist Likelihoodverteilung.

Sei für $i \ne j$ definiert die Projektion von $K_j \cap \{x_i > 0\}$ nach K_i durch $Z_{ji} := Z_i^{-1} \circ Z_j$; diese Projektion induziere in $K_i \cap \{x_j > 0\}$ das nicht notwendig normierte Maß ν_{ij}, erklärt als

$$\nu_{ij} := \varphi_j \circ Z_{ji}^{-1}, \quad 1 \le i,j \le n,\ i \ne j. \tag{1.25}$$

Lemma 1.6b : Es gelte für die in (1.25) eingeführten Maße ν_{ij} die Beziehung

(1.26) $$d\nu_{ij} = x_j \cdot d\varphi_i , \qquad 1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j.$$

Dann ist (1.24) erfüllt und es gibt eine LV p, derart daß

(1.27) $$\varphi_i = p_i \circ Z_i , \qquad i = 1,\ldots n.$$

Beweis : Sei A Borelsch und - o.E.d.A. - $A \subset S \cap \{t_1, t_2 > 0\}$;

$$p_1'(A) = \int_{Z_1^{-1}(A)} d\varphi_1(1,x_2,..x_n) = \int_{Z_1^{-1}(A)} x_2^{-1}\, d\nu_{12}(1,x_2,..x_n) =$$

$$\int_{Z_2^{-1}(A)} u_1\, d\varphi_2(u_1,1,..u_n) = \int_A t_1/t_2\, dp_2'(t),$$

wie man durch Ausrechnen der Abbildungen Z_{12} und Z_2^{-1} leicht bestätigt [1]. Damit ist aber (1.24) gezeigt. Weiter gilt für die anschließend gemäß Lemma 1.6a konstruierte LV p die Beziehung $p_i = p_i'$, $i = 1,\ldots n$, und (1.27) wird eine unmittelbare Folge von (1.23).

Die Eindeutigkeit des auf diese Weise konstruierten p sei vollständigkeitshalber noch formuliert als

Lemma 1.6c : Gegeben die normierten Maße $\varphi_1,..\varphi_n$ in $K_1,..K_n$; dann gibt es höchstens ein $p \in \mathcal{L}$ so daß (1.27) gilt.

Beweis : $p = \sum_i p_i = \sum_i (\varphi_i \circ Z_i^{-1})$ zeigt die Behauptung.

---

1) $Z_{21}(u_1,1,..u_n) = (1,1/u_1,u_3/u_1,\ldots.),$

$Z_{12}(1,x_2,..x_n) = (1/x_2,1,x_3/x_2,\ldots.),$

$Z_2^{-1}(t_1,\ldots t_n) = (t_1/t_2,1,t_3/t_2,\ldots).$

§ 2. Der Alternativtest von n Hypothesen bei Irrtumsschäden.

Wir wollen in diesem Abschnitt die Voraussetzungen, die zu Beginn des vorigen Paragraphen gemacht wurden, noch durch die spezielle Annahme ergänzen, daß die Schadensmenge $\mathcal{T}$ die Gestalt

$$(2.1) \qquad \mathcal{T} = \mathcal{T}_0 := \{s^i,\ i = 1,\dots n\}$$

hat, wobei das n-Tupel s^i die Komponenten

$$(2.2) \qquad s^i_k := 1 - \delta_{ik}\ , \qquad i,k = 1,\dots n,$$

besitzt. Das heißt in testtheoretischer Deutung, es treten die Schadenswerte 0 oder 1 auf, je nachdem man sich für die wahre Hypothese entschieden hat oder nicht. Die Stützfunktion von $\mathcal{T}_0$ werde mit g_0 bezeichnet; ihr Wert ist

$$(2.3) \qquad g_0(x) := \min_i \Big(\sum_k x_k s^i_k\Big) = \sum_i x_i - \max_i x_i\ , \quad x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Eine mögliche Risikofunktion h ist dann von der Gestalt

$$(2.4) \qquad h = \overset{\vee}{p}(g_0), \text{ oder } h(x) = \int_S g_0(x \circ t)\, dp\ , \ x \in \mathbb{R}^n_+\ .$$

Ziel dieses Paragraphen ist es, die Gesamtheit der in (2.4) auftretenden Funktionen h , d.h. die Familie $\{\overset{\vee}{p}(g_0):\ p \in \mathcal{L}\}$, zu charakterisieren.

Bevor wir die Untersuchungen fortsetzen, mögen an dieser Stelle einige fundamentale Sätze über konkave Funktionen, die im folgenden benötigt werden, teils ohne Beweis zitiert, teils für die Zwekke der Arbeit kurz hergeleitet werden.

Lemma 2.1 : Sei φ in $[\alpha,\beta]$ definiert und stetig; sei

$$\varphi(\lambda v + \mu w) \geq \lambda\varphi(v) + \mu\varphi(w), \qquad \lambda,\mu \geq 0,\ \lambda+\mu = 1, \tag{2.5}$$
$$v,w \in [\alpha,\beta].$$

Dann existiert in $[\alpha,\beta)$ die rechtsseitige Ableitung von φ : $\frac{d^+}{dv}\varphi(w) := \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t}(\varphi(w+t) - \varphi(w))$, bzw. in $(\alpha,\beta]$ die linksseitige Ableitung ($\pm\infty$ zugelassen). Beide Ableitungen sind monoton nichtwachsend und stimmen bis auf abzählbar viele Stellen überein. $\frac{d^+}{dv}\varphi$ ist rechtsstetig.

Beweis : Siehe [3], S. 98.

Lemma 2.2 : φ, φ_m seien in (α,β) stetig und mögen dort (2.5) erfüllen, $m \in \mathbb{N}$. Sei weiter

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(w) = \varphi(w), \qquad w \in (\alpha,\beta); \tag{2.6}$$

dann gilt an den Stellen w, an denen φ differenzierbar ist,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{d^+}{dv}\varphi_m(w) = \frac{d}{dv}\varphi(w). \tag{2.7}$$

Beweis : Existiere $\frac{d}{dv}\varphi(w)$; für $h>0$ gilt, falls $w\pm h \in (\alpha,\beta)$:

$$\frac{1}{h}(\varphi_m(w) - \varphi_m(w-h)) \geq \frac{d^+}{dv}\varphi_m(w) \geq \frac{1}{h}(\varphi_m(w+h) - \varphi_m(w)).$$

Übergang zum Limes superior (bzw. inferior) bei $m \longrightarrow \infty$ ergibt

$$\frac{1}{h}(\varphi(w) - \varphi(w-h)) \geq \lim_{m\to\infty}\left\{\begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}\right\} \frac{d^+}{dv}\varphi_m(w) \geq \frac{1}{h}(\varphi(w+h) - \varphi(w)).$$

Bei $h \searrow 0$ streben aber die rechte und linke Seite dieser Abschätzung gegen $\frac{d}{dv}\varphi(w)$.

Lemma 2.3 : Es existiert zu $\varphi \mid \mathbb{R}^n$ genau dann eine kompakte Men-

ge $S' \subset \mathbb{R}^n$, so daß $\varphi(x) = \inf_{s \in S'} x's$, $x \in \mathbb{R}^n$, wenn

(2.8) a) $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$, $\lambda \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$;

b) $\varphi(x+y) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$, $x,y \in \mathbb{R}^n$.

Beweis : Siehe [7] , S. 144.

Sei $S' \subset \mathbb{R}^n_+$ kompakt; interpretiert man S' als einen "Schadensbereich", so will man, entsprechend dem in der Testtheorie üblichen Übergang zu den "reduzierten Schäden", durch eine Translation von S' erreichen, daß

(2.9) $S' \subset \mathbb{R}^n_+$ und $S' \cap \{s_i = 0\} \neq \emptyset$, $i = 1,\ldots n$,

und, durch eine geeignete Maßstabsänderung, daß

(2.10) $S' \subset W := \{x : 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1,\ldots n\}$.

Da das Interesse hauptsächlich dem vorderen Rand des Schadens- und Risikobereichs gilt, geben die nächsten Lemmata eine Charakterisierung der Funktionen $\varphi | \mathbb{R}^n_+$, die Einschränkung auf $\mathbb{R}^n_+$ der Stützfunktion eines derartig "reduzierten Schadensbereichs" sind.

Lemma 2.4 : $\varphi | \mathbb{R}^n_+$ ist genau dann Einschränkung auf $\mathbb{R}^n_+$ der Stützfunktion einer kompakten Menge S', die (2.9) und (2.10) erfüllt, wenn

(2.8') a) $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$, $\lambda \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n_+$;

b) $\varphi(x+y) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$, $x,y \in \mathbb{R}^n_+$;

(2.11) a) $\varphi(e_i) = 0$, $i = 1,\ldots n$,

b) $\sum_i x_i - \varphi(x)$ monoton nichtfallend.

(e_i : i-ter Einheitsvektor)

Beweis : 1) Sei φ Stützfunktion eines solchen S'. Die ersten drei Beziehungen folgen unmittelbar; weiter ist $\sum_i x_i - \varphi(x) =$ $= \sup_{s \in S^*} x's$, wobei S^* aus S' durch Spiegelung am Punkt $(1/2,\ldots 1/2)$ hervorgeht und in W enthalten ist. Aus dieser Darstellung folgt aber (2.11 b).

2) Umgekehrt genüge φ (2.8') und (2.11). Wir suchen eine Fortsetzung von φ auf $\mathbb{R}^n$, die (2.8) erfüllt; eine solche ist etwa

$$\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x^+) - \sum_i x_i^+ + \sum_i x_i , \qquad x \in \mathbb{R}^n, \text{ 1)}$$

die (2.8 a) genügt. Um (2.8 b) nachzuweisen, werde - gleichbedeutend damit - gezeigt, daß

$$\varphi^*(x) := \varphi(x^+) - \sum_i x_i^+ , \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

dieser Beziehung genügt. In der Tat : φ^* gehorcht jedenfalls in $\mathbb{R}^n_+$ der schwächeren Bedingung (2.8'b) und ist dort nach (2.11 b) nichtwachsend. Wegen $(x + y)^+ \leq x^+ + y^+$ gilt aber für $x,y \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi^*(x+y) = \varphi^*((x+y)^+) \geq \varphi^*(x^+ + y^+) \geq \varphi^*(x^+) + \varphi^*(y^+) = \varphi^*(x) + \varphi^*(y),$$

wie es (2.8 b) entspricht. - Damit ist nach dem vorigen Lemma als Stützfunktion eines kompakten $S' \subset \mathbb{R}^n$ erkannt. Aus $\tilde{\varphi}(e_i) = 0$ und $\tilde{\varphi}(-e_i) = -1$ schließt man aber auf (2.9) und (2.10).

Lemma 2.5 : Sei $\varphi \mid \mathbb{R}^n_+$ gegeben; unter der Voraussetzung (2.8') ist (2.11) gleichbedeutend mit

---

1) x^+ ist das n-Tupel mit Komponenten $x_i^+ := \max(0, x_i)$, $i = 1,..n$.

(2.12) a) $0 \le \varphi \le g_0$

b) $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le \sum_i |x_i - y_i|$, $\quad x,y \in \mathbb{R}^n_+$.

Beweis : Daß (2.12) stärker ist als (2.11), ist offensichtlich. Umgekehrt folgt aus (2.11 a) und (2.8') der Reihe nach : $\varphi \ge 0$ und φ nichtfallend, somit in Verbindung mit (2.11 b):

$$\varphi(x) - \varphi(y) \le \varphi(y+(x-y)^+) - \varphi(y) \le \sum_i (x_i - y_i)^+ \le \sum_i |x_i - y_i| .$$

Vertauschung hierin von x und y führt zu (2.12 b). - Sei weiter für $x \in \mathbb{R}^n_+$ etwa $x_1 = \max_i x_i$, dann ist nach (2.11)

$$g_0(x) = \sum_{i \ge 2} x_i = \varphi(x_1 e_1) - x_1 + \sum_{i \ge 1} x_i \ge \varphi(x),$$

womit alles bewiesen ist.

Eingeführt sei noch eine eigene Bezeichnung für die in den beiden letzten Lemmata beschriebene Schar von Stützfunktionen :

Definition 2.1 : $\mathcal{K}^\circ := \{\varphi \in \mathcal{K} : \varphi$ erfüllt (2.8') und (2.12)$\}$.

Alle in diesem und im nächsten Paragraphen behandelten Stützfunktionen gehören $\mathcal{K}^\circ$ an. Die Bedeutung dieses Bereichs liegt darin, daß jede Stützfunktion einer beschränkten Menge nach einer einfachen Umformung ihm angehört (vgl. Betrachtung auf S. 18) und daß die Anwendung von $\check{p}$, $p \in \mathcal{L}$, nicht aus $\mathcal{K}^\circ$ hinausführt (nach Lemma 1.3; außerdem überträgt sich vermöge (1.11) die Eigenschaft (2.12 b) von φ auf $\check{p}(\varphi)$). Im sequentiellen Fall wird es sich als zweckmäßig herausstellen, an die dort betrachtete Funktionenklasse die Forderung der Gültigkeit von (2.12 b) nicht zu stellen.

Nach diesen vorbereitenden Hilfssätzen werde das Problem der

Charakterisierung der Funktionen h in (2.4) wieder aufgenommen. Aus Gründen des einfacheren Rechnens werden wir nach Funktionen h' der Gestalt

$$h'(x) = \int_S \max_i (x_i t_i)\, dp\,, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \qquad (p \in \mathcal{L}) \tag{2.13}$$

fragen. Offenbar erfüllt h (2.4) genau dann, wenn $h' := \sum_i x_i - h$ (2.13) erfüllt. Ein Teilergebnis dieses Abschnitts ist nun der

Satz 2.1 : Wenn $h' \in \mathcal{K}$ eine Darstellung (2.13) besitzt, so gilt:

$$\text{a)}\quad h'(x+y) \leq h'(x) + h'(y), \qquad x,y \in \mathbb{R}^n_+ ; \tag{2.14}$$

$$\text{b)}\quad \max_i x_i \leq h'(x) \leq \sum_i x_i\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n_+ ;$$

für $u = (u_{i_1},..u_{i_m})$, $z = (z_{i_1},..z_{i_m})$, $0 \leq u \leq z$, ist

$$(-1)^m \Delta^z_u h' \leq 0\,,^{1)} \qquad m = 1,...n. \tag{2.15}$$

Beweis : (2.14) folgt unmittelbar aus (2.13) durch elementare Abschätzungen der Funktion $\max_i x_i$. Zum Beweis von (2.15) werde in (2.13) an der Stelle $(1,x_2,...x_n)$, $x_i > 0$, $i = 2,..n$, die rechtsseitige Ableitung nach x_1 genommen :

$$\frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(1,x_2,..x_n) = \int_S I\{t_1 \geq t_i x_i,\ i \geq 2\}\, t_1\, dp \tag{2.16}$$

Es existieren nämlich die Ableitungen unter dem Integral und auf der linken Seite beide nach Lemma 2.1. Beide sind Limes einer mo-

---

1) Δ^z_u bedeute die m-dimensionale Differenz über die Koordinaten $i_1,...i_m$ bei festgehaltenen übrigen Koordinaten; vgl. [12], S. 37.

notonen Folge von Differenzenquotienten, somit ist die Ableitung unter dem Integral statthaft. Wegen $x_i > 0$, $i = 2,..n$, und $t_1 > 0$ p_1-fast überall in S kann (2.16) umgeformt werden zu

$$(2.17) \qquad \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(1,x_2,..x_n) = p_1(t_i/t_1 \leq x_i^{-1},\ i = 2,..n) .$$

Die Funktion

$$(2.18) \qquad V_1(\alpha_2,..\alpha_n) := \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(1,\alpha_2^{-1}..\alpha_n^{-1}),\ \alpha_2,..\alpha_n > 0,$$

ist also die Verteilungsfunktion der nichtnegativen Größen t_i/t_1, $i \geqslant 2$, bezüglich des Maßes p_1 und erfüllt somit die Differenzenbedingung (vgl. [12], S. 38) :

für $u = (u_{i_1},..u_{i_m})$, $z = (z_{i_1},..z_{i_m})$, $0 < u \leq z$, $i_1,..i_m \geqslant 2$, ist

$$(2.19) \qquad \Delta_u^z V_1 \geqslant 0 .$$

Ersetzt man hierin die z_{i_μ} und u_{i_μ} jeweils durch ihre Reziproken und berücksichtigt dabei die Umkehrung der Anordnung, so gilt unter den Voraussetzungen von (2.19) :

$$(2.20) \qquad (-1)^m \Delta_u^z \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(1,\alpha_2,...\alpha_n) \geqslant 0 , \qquad 0 \leq m < n .$$

Integration von (2.20) ergibt, wenn man bedenkt, daß die partielle Ableitung von h' positiv homogen vom Grad 0 ist, für $0 < u_1 \leq z_1$:

$$(2.21) \qquad 0 \leq (-1)^m \Delta_u^z \left[\int_{u_1}^{z_1} \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(\xi,\alpha_2,..\alpha_n) \right] d\xi =$$

$$(-1)^m \Delta_u^z \left[h'(z_1,\alpha_2,..) - h'(u_1,\alpha_2,..) \right] = (-1)^m \Delta_{u_1,u}^{z_1,z} h'(\alpha).$$

Der letzte Ausdruck stellt aber eine (m+1)-dimensionale Differenz dar. Aus Symmetriegründen ist damit (2.15) bewiesen.

Bemerkung : In § 3 wird gezeigt, daß im Fall $n = 2$ (2.15) eine Folge von (2.14) ist, während für $n \geq 3$ (2.15) eine zusätzliche Einschränkung bedeutet. Als Beispiel betrachten wir $(n = 3)$

$$(2.22) \qquad a(x) := \max (x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+ .$$

Als Supremum konvexer Funktionen erfüllt a (2.14), nicht aber die Differenzenbedingung; denn für $u = (0,0,0)$, $z = (1,1,1)$ ist

$$(-1)^3 \Delta^z_u a = -(2 - 3\cdot 2 + 3\cdot 1 - 0) = 1 > 0 .$$

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen stellt der folgende Satz dar, der die Umkehrung zu Satz 2.1 bildet.

Satz 2.2 : Erfülle $h' \in \mathcal{K}$ (2.14) und (2.15); dann gibt es genau eine LV p, so daß (2.13) gilt.

Beweis : Der Beweis werde in mehreren Schritten geführt. Im ersten Schritt wird gezeigt, daß die wie in (2.18) gebildete Funktion V_1 (und analog dazu definierte Funktionen V_i, $i \geq 2$) eine $(n-1)$-dimensionale Verteilungsfunktion ist. Der zweite Schritt zeigt, daß es eine LV p gibt, so daß V_i die Verteilung von $(t_j/t_i,\ j \neq i)$ bezüglich p_i angibt, $i = 1,\ldots n$. Zuletzt wird noch bewiesen, daß das so gefundene p eine Darstellung (2.13) von h' gestattet und durch h' eindeutig bestimmt ist.

I. Sei h' gegeben, sowie (2.14) und (2.15) vorausgesetzt; wir bilden wie in (2.18) die Funktion V_1 (h' ist ja konvex, also einseitig partiell differenzierbar) und zeigen, daß V_1 eine Verteilungsfunktion ist, wenn man noch setzt :

(2.23) $$V_1(\alpha) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \in \bigcup_{i \geq 2} \{\alpha_i < 0\} .$$

Zuerst werde die Differenzenbedingung für V_1 gezeigt. Sei einmal $0 < y_{i_\mu} \leq z_{i_\mu}$, $\mu = 0, \ldots m$, $m \leq n-1$; dann ist

$$\Delta_y^z V_1(\alpha) = \lim_{\tau \searrow 0} \frac{1}{\tau} \left[\Delta_y^z h'(1+\tau, \alpha^{-1}) - \Delta_y^z h'(1, \alpha^{-1}) \right] .$$

(α^{-1} sei komponentenweise verstanden.)

Berücksichtigt man wieder den durch Inversenbildung entstehenden Faktor $(-1)^m$ bei der (m+1)-dimensionalen Differenz in der eckigen Klammer, so folgt nach dem Grenzübergang $\tau \searrow 0$ wegen (2.15) in der Tat $\Delta_y^z V_1 \geq 0$. Speziell $m = 1$ zeigt, daß V_1 monoton in jeder Variablen wächst, daß also V_1 durch rechtsstetige Ergänzung auch in $\bigcup_{i \geq 2} \{\alpha_i = 0\}$ erklärt werden kann. Man hat somit

(2.24) $$\Delta_y^z V_1 \geq 0 , \quad 0 \leq y_{i_\mu} \leq z_{i_\mu}, \quad \mu = 0, \ldots m; \; m \leq n-1 .$$

Bei der Ergänzung gemäß (2.23) bleibt V_1 nichtnegativ und nichtfallend in allen Variablen in ganz $\mathbb{R}^{n-1}$. Um eine beliebige Differenz $\Delta_y^z V_1$, $y \leq z$, zu berechnen, werde die Differenzenbildung zuerst über die Indices i durchgeführt, für die $y_i < 0$, danach über die restlichen Indices, symbolisch:

(2.25) $$\Delta_y^z V_1(\alpha) = \Delta_{y^1}^{z^1}(\Delta_{y^2}^{z^2} V_1(\alpha^1, \alpha^2)).$$

Da sämtliche Komponenten von y^2 als negativ vorausgesetzt sind, reduziert sich die innere Differenz auf $V_1(\alpha^1, z^2)$. Somit ist

(2.26) $$\Delta_y^z V_1(\alpha) = \Delta_{y^1}^{z^1} V_1(\alpha^1, z^2) \geq 0 ,$$

nach (2.24), falls $z^2 \geqslant 0$; andernfalls verschwindet $V_1(\alpha^1, z^2)$ wegen (2.23) und (2.26) ist ebenfalls gültig.

Um nachzuweisen, daß V_1 Verteilungsfunktion ist, bleibt noch zu zeigen, daß V_1 in $\{\alpha > 0\}$ rechtsstetig ist und daß $\lim_{\alpha \to +\infty} V_1(\alpha) = 1$. Wegen der Monotonie genügt es, Limiten der Form

$$\lim_{\tau \searrow 1} V_1(\alpha_2 \tau, \ldots \alpha_n \tau) , \qquad \alpha_2, \ldots \alpha_n > 0 , \tag{2.27}$$

zu betrachten. (2.27) wird aber umgeformt zu

$$\lim_{\tau \searrow 1} \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(1, (\alpha_2 \tau)^{-1}, \ldots) = \lim_{\tau \searrow 1} \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(\tau, \alpha_2^{-1}, \ldots \alpha_n^{-1}) =$$

$$= \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(1, \alpha_2^{-1}, \ldots \alpha_n^{-1}) = V_1(\alpha_2, \ldots \alpha_n) ,$$

wegen der Rechtsstetigkeit der Rechtsableitung. In Verbindung mit (2.23) ist damit V_1 als rechtsstetig erkannt. Ebenso zeigt man

$$\lim_{\xi \to \infty} V_1(\xi, \ldots \xi) = \lim_{\xi \to \infty} \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(1, \xi^{-1}, \ldots \xi^{-1}) =$$

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(\xi, 1, \ldots 1) = 1 ,$$

da die konvexe Funktion $\varphi(\xi) := h'(\xi, 1, \ldots 1)$ nach (2.14) der Abschätzung

$$\xi \leq \varphi(\xi) \leq \xi + n - 1 , \qquad \xi \geqslant 1 ,$$

genügt. - V_1 ist also Verteilungsfunktion; weiter folgt aus (2.23), daß das durch V_1 definierte Intervallmaß ϱ_1 auf $\mathbb{R}_+^{n-1}$ konzentriert ist und daher als Maß in $K_1 \subset \mathbb{R}_+^n$ (vgl. S. 14) aufgefaßt werden kann.

II. Analog dem soeben beschriebenen Vorgang lassen sich wie ϱ_1

insgesamt n Maße φ_i in K_i durch partielle Ableitung von h' nach x_i , i = 1,...n, gewinnen. Nächster Schritt des Beweises wird sein, zu zeigen, daß die φ_i als Verteilungen von t_k/t_i, $k \neq i$, bezüglich p_i (wobei p LV) auftreten. Denkt man sich die Maße φ_i in natürlicher Weise, wie sie bereits in der Bezeichnung der Argumente von V_1 (und allgemein von V_i, $i \leq n$) zum Ausdruck kommt, auf die Hyperebenen $K_i = \{x_i = 1\} \subset \mathbb{R}^n_+$ übertragen, so existiert nach Lemma 1.6 dann eine solche LV p , wenn die φ_i (nach den Bezeichnungen von (1.22) bis (1.25)) die Bedingung (1.26) erfüllen. Denn dann gilt wegen (1.27) für A Borelsch, $A \subset K_i$,i = 1,...n,

$$(2.28) \qquad \varphi_i(A) = p_i(Z_i(A)) = p_i(\{(t_1/t_i,..1,..t_n/t_i) \in A\}) .$$

Wir haben daher das Erfülltsein von (1.26) nachzuweisen. Eine etwas schwächere Aussage werde zunächst gezeigt unter der zusätzlichen Annahme, daß h' n-mal stetig partiell differenzierbar ist :

1. Behauptung : h'sei in $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ n-mal stetig partiell differenzierbar; dann gilt für die gemäß Teil I des Beweises aus V_i abgeleiteten Maße φ_i

$$(2.29) \qquad \nu_{ij}(A) = \int_A x_j \, d\varphi_i(x) , \quad A \subset \mathring{K}_i , \; i \neq j, \; 1 \leq i,j \leq n.$$

($\mathring{K}_i$ bezeichne $K_i \cap \{x_j > 0, \; j \neq i\}$)

Beweis : In diesem Fall haben (o.E.d.A.) φ_1, φ_2 bezüglich des Lebesgue-Maßes in $\mathring{K}_1$, $\mathring{K}_2$ die resp. Wahrscheinlichkeitsdichten

$$(2.30) \qquad d_1(\alpha_2,\ldots\alpha_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} h'(1,\alpha_2^{-1},\ldots) \, (-1)^{n-1} \prod_{i \neq 1} \alpha_i^{-2},$$

$$d_2(\alpha_1,\ldots\alpha_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} h'(\alpha_1^{-1},1,..\alpha_n^{-1})\ (-1)^{n-1} \prod_{j\neq 2} \alpha_j^{-2}.$$

Z_{21} hat (vgl. Fußnote auf S. 15) an der Stelle $(u_1,1,..u_n)$ die Funktionaldeterminante (bezüglich der wirklich variablen Koordinaten) $J(u_1,\ldots u_n) = -u_1^{-n}$, somit gilt für die Dichte d_{12} von ν_{12} (vgl. [12], S. 228)

$$d_{12}(\alpha_2,..\alpha_n) = d_2(\alpha_2^{-1},\alpha_3\alpha_2^{-1},\ldots)\alpha_2^{-n} =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} h'(\alpha_2,1,\alpha_2\alpha_3^{-1},\ldots)(-1)^{n-1}\alpha_2^{2n-2}\prod_{j\geq 3}\alpha_j^{-2}\cdot\alpha_2^{-n} =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} h'(1,\alpha_2^{-1},..\alpha_n^{-1})(-1)^{n-1}\alpha_2^{-1}\prod_{j\geq 3}\alpha_j^{-2},$$

da die n-te Ableitung von h' homogen vom Grad 1-n ist; somit

$$d_{12}(\alpha_2,..\alpha_n) = \alpha_2 \cdot d_1(\alpha_2,..\alpha_n)\ , \tag{2.31}$$

wie es (2.29) entspricht.

2. Behauptung : Die 1. Behauptung gilt auch ohne die Voraussetzung über die Differenzierbarkeit von h'.

Beweis : Zu $k\in\mathbb{N}$ sei gegeben eine n-mal stetig partiell differenzierbare Wahrscheinlichkeitsdichte $m_k \mid \mathbb{R}^n$, derart daß

$$\text{(2.32) a)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} x_i\, m_k(x)\, dx = 1\ , \qquad i = 1,\ldots n,$$

$$\text{b)} \quad m_k(x) = 0 \quad \text{für } x \text{ mit } \Big|\sum_i x_i - 1\Big| \geq 2^{-k}.$$

Wir definieren die "geglätteten" Funktionen

$$h'_k(u) := \int_{\mathbb{R}^n_+} h'(u\circ x)\, m_k(x)\, dx, \quad u \in \mathbb{R}^n_+,\ k \in \mathbb{N}, \tag{2.33}$$

die (2.14) und (2.15) erfüllen, wie man durch Integration über diese Ungleichungen leicht bestätigt. Weiter sind die h'_k in $\mathring{\mathbb{R}}^n_+$ n-mal stetig partiell differenzierbar, wie man aus der Darstellung

$$h'_k(u) = \int_{\mathbb{R}^n_+} h'(v)\, m_k(v_1/u_1, \ldots v_n/u_n) \prod_i u_i^{-1}\, dv, \qquad u \in \mathring{\mathbb{R}}^n_+,$$

erkennt. Aus der Stetigkeit von h' und (2.32) folgt noch, daß

$$h'(u) = \lim_{k\to\infty} h'_k(u), \qquad u \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.34}$$

An den Stellen u, an denen h' nach x_i partiell differenzierbar ist, gilt sogar (Lemma 2.2):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h'(u) = \lim_{k\to\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} h'_k(u), \tag{2.35}$$

somit, da (2.35) auf einer in $\mathbb{R}^n_+$ dichten Menge von u-Werten zutrifft, folgt

$$\varphi_i^k \xrightarrow[k\to\infty]{w.} \varphi_i, \qquad i = 1, \ldots n, \tag{2.36}$$

wenn φ_i^k aus h'_k gemäß Teil I gebildet wird (Bezeichnung der Maßkonvergenz nach [6]). Für $w \in \mathcal{C}(K_i)$ mit kompaktem Träger, der in $\mathring{K}_i$ enthalten ist, gilt daher nach der 1. Behauptung:

$$\begin{aligned} \int_{K_i} x_j\, w(x)\, d\varphi_i(x) &= \lim_{k\to\infty} \int_{K_i} x_j\, w(x)\, d\varphi_i^k(x) = \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{K_j} w(Z_{ji}(y))\, d\varphi_j^k(y) = \int_{K_j} w(Z_{ji}(y))\, d\varphi_j(y), \end{aligned} \tag{2.37}$$

da auch $w \circ Z_{ji}$ kompakten Träger, enthalten in $\mathring{K}_j$, besitzt. (2.37) ist aber äquivalent zu (2.29), womit die 2. Behauptung bewiesen ist.

Um jetzt weiter auf (1.26) schließen zu können, ist es nötig, das Verhalten der Maße φ_i auf den Rändern $K_i - \mathring{K}_i$ zu betrachten. Dazu dient als vorbereitender Hilfssatz die

3. Behauptung : Sei $I \subset \{1,\ldots n\}$, $1 \in I$. In $\mathbb{R}_+^n$ und insbesondere in K_1 sei erklärt die Projektion pr_I durch

$$(2.38) \qquad (pr_I(x))_i := \begin{cases} x_i & , i \in I \\ 0 & , i \notin I . \end{cases}$$

Sei $\varphi_1^I := \varphi_1 \circ pr_I^{-1}$ eine Marginalverteilung von φ_1, erzeugt durch die Verteilungsfunktion V_1^I; dann gilt

$$(2.39) \qquad V_1^I(\alpha) = \frac{\partial^+}{\partial x_1} h_I'(1, \alpha^{-1}) , \qquad \alpha > 0,$$

$$\text{wenn } h_I'(x_1, \alpha) := h'(x_1, \alpha, 0).$$

($x \in \mathbb{R}_+^n$ werde aufgespalten in (x_1, α, β), wobei (x_1, α) für $(x_i)_{i \in I}$ stehe und β für $(x_i)_{i \notin I}$.)

Beweis : Nach Definition der Marginalverteilung ist

$$V_1^I(\alpha) = \lim_{\beta \to \infty} V_1(\alpha, \beta) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(1, \alpha^{-1}, \tau) .$$

Wegen der Konvexität von h' ist für $\alpha > 0$ die Funktion $\varphi_\tau(\xi) := h'(\xi, \alpha^{-1}, \tau)$ bei $\tau = 0$ in einer in $\mathbb{R}_+$ dichtliegenden Menge von ξ-Werten differenzierbar; dort gilt dann nach Lemma 2.2, da ja $\varphi_\tau(\xi)$ stetig von τ abhängt :

$$\frac{\partial^+}{\partial x_1} h_I(\xi, \alpha^{-1}) = \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(\xi, \alpha^{-1}, 0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(\xi, \alpha^{-1}, \tau) =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{\partial^+}{\partial x_1} h'(1, (\alpha\xi)^{-1}, (\tau\xi)^{-1}) = \lim_{\beta \to \infty} V_1(\alpha\xi, \beta) = V_1^I(\alpha\xi).$$

Läßt man hierin ξ von rechts gegen 1 streben und berücksichtigt dabei die Rechtsstetigkeit von V_1^I und der partiellen Rechtsableitung von h_I', folgt die 3. Behauptung.

Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse geschieht in der

4. Behauptung : Die Maße φ_i, i = 1,...n, erfüllen (1.26).

Beweis : Sei $I \subset \{1,..n\}$, seien $i,j \in I$, $i \neq j$, fest gewählt und sei $K_i^I := \{x \in K_i : x_1 = 0,\ 1 \notin I;\ x_1 > 0,\ 1 \in I\}$.
Wir bilden für ein Borelsches $A_o \subset K_i^I$ die Zerlegung

(2.40) $A_o = A_1 - A_2$, wobei $A_1 := pr_I^{-1}(A_o)$, $A_2 := A_1 - A_o$.

Analog werde $B_o := Z_{ij}(A_o)$ dargestellt, wobei wegen der Vertauschbarkeit von pr_I und Z_{ij} gilt $B_k = Z_{ij}(A_k)$, k = 0,1,2. Nun ist in (2.40) $A_2 \subset \mathring{K}_i$ und somit nach (2.29)

(2.41) $$\nu_{ij}(A_2) = \int_{A_2} x_j \, d\varphi_i \ ;$$

weiter gilt für den Bestandteil A_1 in (2.40)

(2.42) $$\nu_{ij}(A_1) = \varphi_j(B_1) = \varphi_j(pr_I^{-1}(B_o)) = \varphi_j^I(B_o) =$$
$$= \int_{A_o} x_j \, d\varphi_i^I = \int_{A_1} x_j \, d\varphi_i \ ,$$

denn für φ_i^I und φ_j^I gilt (2.29) entsprechend, da nach der 3. Behauptung diese Maße durch Differenzieren von h_I' gewonnen werden und h_I' alle Voraussetzungen unseres Satzes - (2.14) und (2.15) - ebenso wie h', mit $|I|$ an Stelle von n erfüllt. (2.41) und (2.42) zusammen bedeuten aber

(2.43) $$\nu_{ij}(A_o) = \int_{A_o} x_j \, d\varphi_i \,.$$

In $K_i \cap \{x_j > 0\} = \bigcup_{I \ni i,j} K_i^I$ erhält man daher allgemein

(2.44) $$d\nu_{ij} = x_j \, d\varphi_i \,,$$

wie es (1.26) entspricht.

Insgesamt ist nach diesen vier Behauptungen das am Beginn von Beweisteil II aufgestellte Programm erfüllt : zu den in I konstruierten Wahrscheinlichkeitsmaßen $\varphi_1, .. \varphi_n$ gibt es eine LV p ,so daß (2.28) gilt.

III. 1. Behauptung : Die in Beweisteil II gefundene LV p führt zu einer Darstellung (2.13) von h'.

Beweis : Sei

$$\bar{h}(x) := \int_S \max_i (x_i t_i) \, dp \qquad , x \in \mathbb{R}_+^n \,;$$

dann ist nach (2.17) im Beweis zu Satz (2.1) für $\alpha_j > 0$, $j \neq i$:

$$\frac{\partial^+}{\partial x_i} \bar{h}(\alpha_1^{-1}, .. 1 .. \alpha_n^{-1}) = p_i(t_j/t_i \leq \alpha_j, \; j \neq i) = \varphi_i(\{x_j \leq \alpha_j, j \neq i\})$$

$$= V_i(\alpha_1, \ldots \alpha_n) = \frac{\partial^+}{\partial x_i} h'(\alpha_1^{-1}, .. 1 .. \alpha_n^{-1}).$$

Das heißt, die Rechtsableitungen von $\bar{h}$ und h' stimmen in $\mathring{\mathbb{R}}_+^n$ überein, somit auch $\bar{h}$ und h' in $\mathring{\mathbb{R}}_+^n$ bis auf eine additive Konstante. Stetige Ergänzung in ganz $\mathbb{R}_+^n$ und die Bedingung $\bar{h}(0) = h'(0) = 0$ zeigen, daß $\bar{h} = h'$.

2. Behauptung : p ist in (2.13) durch h' eindeutig bestimmt.

Beweis : Nach Lemma 1.6c ist eine LV p durch die Maße $\varphi_i =$

$= p_i \circ Z_i$, $i = 1,..n$, festgelegt, die sich, wieder nach Formel (2.17), aus den Ableitungen von h' ergeben.

Nach diesen beiden Behauptungen ist Satz 2.2 vollständig bewiesen.

Eine andere Formulierung von Satz 2.2, die wieder Bezug nimmt auf die Stützfunktion g_o und den Bereich $\mathcal{K}^o$ (vgl. Def. 2.1), ist

Satz 2.3 : $h \in \mathcal{K}$ ist genau dann von der Gestalt (2.4), wenn $h \in \mathcal{K}^o$ und außerdem für $y = (y_{i_1},..y_{i_m})$, $z = (z_{i_1},..z_{i_m})$, $y \leq z$, $m \geq 2$

$$(2.45) \qquad (-1)^m \, \Delta_y^z \, h \geqslant 0 \, .$$

In diesem Fall ist p in (2.4) eindeutig durch h bestimmt.

Beweis : Es sind einfach die Funktionen h zu charakterisieren, die von der Gestalt $h(x) = \sum_i x_i - h'(x)$ sind, wobei h' (2.14) und (2.15) genügt. Nun sind aber (2.14) und (2.15) für $m = 1$ wegen Lemma 2.5 äquivalent zu $h \in \mathcal{K}^o$ und (2.15) für $m \geqslant 2$ zu (2.45).

Nach den bisherigen Sätzen ist jedem $p \in \mathcal{L}$ eine Funktion in $\mathcal{K}^o \subset \mathcal{K}$ zugeordnet vermöge $p \rightsquigarrow \check{p}(g_o)$, wobei diese Zuordnung injektiv ist. $\mathcal{K}$ ist topologischer Raum mit Hilfe der Norm (1.12); daher läßt sich auch in $\mathcal{L}$ eine Metrik einführen und damit eine topologische Struktur, indem man $\mathcal{L}$ in $\mathcal{K}$ einbettet. Die Metrik ist dann definiert als

$$(2.46) \qquad d(p,q) := \| \check{p}(g_o) - \check{q}(g_o) \| \quad , \; p,q \in \mathcal{L} \, .$$

Satz 2.4 : Für $a \in \mathcal{K}$ ist die Abbildung $p \rightsquigarrow \check{p}(a)$ von $\mathcal{L}$ nach

$\mathcal{K}$ stetig.

Beweis : Wir zeigen die Stetigkeit an der Stelle p'.

1) Gegeben sei eine Folge in $\mathcal{L}$ $\{p^r : r \in \mathbb{N}\}$ mit $\lim_{r\to\infty} d(p^r, p') = 0$. Wir beweisen, daß die Folge im Sinne der Topologie der Maße in S schwach gegen p' konvergiert, d.h. daß gilt

$$(2.47) \qquad \lim_{r\to\infty} \int_S b(t)\, dp^r = \int_S b(t)\, dp', \qquad b \in \mathcal{C}(S).$$

Zunächst einmal besitzt jede unendliche Teilfolge von $\{p^r\}$ eine schwach konvergente Teilfolge (vgl. [6], S. 180). Wir behaupten, daß sämtliche Limiten schwach konvergenter Teilfolgen gleich p' sind, woraus sich dann die schwache Konvergenz der gesamten Folge gegen p' ergibt : aus der Gleichung

$$(2.47') \qquad \lim_{l\to\infty} \int_S b(t)\, dq^l = \int_S b(t)\, dq', \qquad b \in \mathcal{C}(S),$$

für eine Teilfolge $\{q^l : l \in \mathbb{N}\}$ ersieht man, wenn man $b(t) = t_i$ setzt, $i = 1,..n$, daß $q' \in \mathcal{L}$. Setzt man $b = g_o(x^o.)$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, folgt

$$(\overset{\vee}{q}'(g_o))(x) = \lim_{l\to\infty} (\overset{\vee}{q}^l(g_o))(x) = \lim_{r\to\infty} (\overset{\vee}{p}^r(g_o))(x) = (\overset{\vee}{p}'(g_o))(x)$$

d.h. aber $p' = q'$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 2.3.

2) Die Familie $\{\overset{\vee}{p}(a) : p \in \mathcal{L}\}$ ist nach Lemma 1.2 gleichgradig stetig. Die punktweise Konvergenz der Funktionen $\overset{\vee}{p}^r(a)$ gegen $\overset{\vee}{p}'(a)$, die im 1. Teil gezeigt wurde - man setze in (2.47) $b = a(x^o.)$ - , zieht daher gleichmäßige Konvergenz in S nach sich, w.z.b.w.

Corollar : Die schwache Topologie in $\mathcal{L}$ ist identisch mit der durch die Metrik d definierten.

Beweis : Daß die d-Konvergenz die schwache nach sich zieht, wurde in Teil 1 des obigen Beweises gezeigt. Die Umkehrung folgt aus dem 2. Teil, wenn man speziell $a = g_o$ setzt.

Natürlich ließen sich auf Grund des Corollars die folgenden topologischen Aussagen mit Begriffen der schwachen Topologie formulieren und Satz 2.4 selbst würde dann gegenstandslos. Der Sinn des Satzes besteht jedoch vielmehr darin, zu zeigen, daß die leicht zu berechnende Metrik d die schwache Topologie erzeugt. - Eine wichtige Verschärfung von Satz 2.4, die aber leicht aus diesem gefolgert werden kann, ist der

Satz 2.5 : Die Abbildung $U : \mathfrak{L} \times \mathfrak{K} \longrightarrow \mathfrak{K}$, erklärt als $U(p,a) := \check{p}(a)$, ist stetig in der Produkttopologie.

Beweis : Die Stetigkeit in (p',a') wird folgendermaßen gezeigt :

$$\| U(p,a) - U(p',a') \| \leq \| \check{p}(a - a') \| + \| \check{p}(a') - \check{p}'(a') \| .$$

Der erste Summand rechts ist nach Corollar zu Lemma 1.1 durch $\| a - a' \|$ zu majorisieren, der zweite strebt nach dem vorigen Satz mit $d(p,p')$ gegen Null.

§ 3. Der Fall zweier Hypothesen.

In diesem Paragraphen wird zunächst das Problem der Beschreibung möglicher Risikofunktionen h in (0.1) zu gegebener Schadensfunktion g für den Fall $n = 2$ behandelt. Während der vorausgegangene Paragraph die Spezialisierung der allgemeinen Gleichung (0.1) auf den Fall $g = g_o$ behandelte, liegt jetzt die Spezialisierung in der Beschränkung auf die Dimension 2. Zuerst aber soll das Zusammentreffen beider Spezialfälle untersucht werden und Satz 2.3 für $n = 2$ neu und einfacher formuliert werden. (In Teil A und B wird stets, auch wenn nicht eigens erwähnt, $n = 2$ vorausgesetzt.)

A. Irrtumsschäden.

Satz 3.1 : Zu $h \in \mathcal{K}$ existiert genau dann ein $p \in \mathcal{L}$, so daß $h = \check{p}(g_o)$, wenn

(3.1) a) $h(x+y) \geq h(x) + h(y), \qquad x,y \in \mathbb{R}^2_+,$

b) $0 \leq h \leq g_o$.

Beweis : Nach Satz 2.3 ist nur noch zu zeigen, daß aus (3.1) (a) die Beziehung (2.12 b) und (b) (2.45) für $m = 2$ folgt.

Zu (a): Man betrachtet die konkave Funktion $\varphi(\xi) := h(\xi,1)$, die wegen (3.1 b)

$$0 \leq \varphi(\xi) \leq \min(\xi,1), \quad \xi \geq 0,$$

erfüllt. Dies bedeutet aber für die Rechtsableitungen :

(3.2) $0 \leq \frac{d^+}{d\xi}\varphi(0) \leq 1$ und $\lim_{\tau\to\infty} \frac{d^+}{d\xi}\varphi(\tau) = 0$.

Die Ableitungen sind positiv homogen vom Grad 0; daraus folgt

$$0 \leq \frac{\partial^+}{\partial x_1} h \leq 1 ,$$

was aus Symmetriegründen sofort zu (2.12 b) führt.

Zu (b): Sei $y \geqslant u > 0$; dann ist

$$\Delta_u^y h = (h(y_1,y_2) - h(y_1,u_2)) - (h(u_1,y_2) - h(u_1,u_2)) =$$

$$= \int_{u_2}^{y_2} \left[\frac{\partial^+}{\partial x_2} h(y_1,\tau) - \frac{\partial^+}{\partial x_2} h(u_1,\tau) \right] d\tau \geqslant 0$$

wegen der Homogenität und Monotonie der Ableitung.

Corollar : (3.1) ist äquivalent zu $h \in \mathcal{H}^o$.

Beweis : Die Bedingung $h \in \mathcal{H}^o$ ist schwächer als (2.4) und stärker als (3.1); die beiden letzten Aussagen sind aber nach Satz 3.1 gleichwertig.

Wir sehen, daß bei $g = g_o$ der Fall $n = 2$ vor $n > 2$ gerade dadurch ausgezeichnet ist, daß die schwache Bedingung (3.1), die bereits auf Grund von Lemma 1.3 notwendig für eine Darstellung (2.4) von h ist, sich auch als hinreichend erweist. Dagegen ist die Differenzenbedingung, die in den Überlegungen des vorigen Paragraphen eine zentrale Rolle spielte, hier automatisch erfüllt.

B. Beliebige Schäden.

Gegeben sei jetzt ein Schadensbereich $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+^2$, dessen Stützfunktion g auf die Form $g \in \mathcal{H}^o$ reduziert sei (vgl. Betrachtungen, die Lemma 2.4 vorausgehen). Eine einfache Eigenschaft der Funktio-

nen aus $\mathcal{K}^0$ sei zunächst festgehalten in

Lemma 3.1 : Jedem $g \in \mathcal{K}^0$ entspricht ein (positives) Maß γ in $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

(3.3) a) $\gamma(\mathbb{R}) \leq 1$ b) $\int_{\mathbb{R}} e^w \, d\gamma(w) \leq 1$,

das die maßdefinierende Funktion G besitzt, erklärt als

(3.4) $G(w) := -\frac{\partial^+}{\partial x_1} g(e^w,1), \qquad w \in \mathbb{R}.$

Umgekehrt ist jedem Maß γ mit Eigenschaft (3.3) genau ein $g \in \mathcal{K}^0$ zugeordnet, so daß γ aus G gemäß (3.4) erzeugt ist.

Beweis : Nach Satz 3.1 gibt es eine LV p , so daß $g = \check{p}(g_0)$. Anwendung von (2.17) auf $\sum_i x_i - g(x)$ liefert

(3.5) $G(w) = -\frac{\partial^+}{\partial x_1} g(1,e^{-w}) = p_1(t_2/t_1 \leq e^w) - 1$;

das bedeutet, daß G bis auf eine additive Konstante Verteilungsfunktion von $\log t_2/t_1$ bezüglich p_1 ist. Somit gilt (3.3) :

$$\gamma(\mathbb{R}) = p_1(t_2 > 0) \leq 1 ,$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^w \, d\gamma(w) = \int_S t_2/t_1 \, dp_1 = \int_{\{t_1 > 0\}} dp_2 \leq 1 .$$

Die Umkehrung wird bewiesen, indem man, ausgehend von γ mit (3.3), eine positiv homogene Funktion g' definiert :

(3.6) a) $G'(w) := -\gamma((w,\infty))$ b) $g'(\xi,1) := -\int_0^\xi G'(\log v) \, dv$.

g' ist konkav, da G' monoton nicht fallend ist; von (3.3 a) lei-

tet man $g'(\xi,1) \leq \xi$ her, von (3.3 b)

$$g'(\xi,1) \leq \int_0^\infty \gamma((\log v,\infty))\,dv = \int_{\mathbb{R}} e^w\,d\gamma(w) \leq 1\,,$$

woraus sich $g' \in \mathfrak{K}^\circ$ ergibt. g' ist eindeutig durch γ bestimmt, da die Konstruktionsschritte (3.6) wegen (3.4) offenbar notwendig sind, um g' aus γ zu gewinnen.

Corollar : Jedes Maß γ mit Eigenschaft (3.3) kann als Verteilung von t_2/t_1 bezüglich p_1, wobei $p \in \mathfrak{L}$, auftreten.

Beweis : Man konstruiert nach (3.6) ein $g' \in \mathfrak{K}^\circ$ zu gegebenem γ; p, bestimmt durch $g' = \check{p}(g_o)$, leistet wegen (3.5) das Verlangte.

Satz 3.2 : Das Bestehen der Beziehung (0.1) ist gleichbedeutend damit, daß die g und h gemäß (3.4) zugeordneten Maße γ, η eine Gleichung

$$\eta = \gamma * \pi \tag{3.7}$$

erfüllen, wobei π ein (3.3) gehorchendes Maß in $\mathbb{R}$ darstellt.

Beweis : Partielles rechtsseitiges Differenzieren von (1.9) ergibt

$$\frac{\partial^+}{\partial x_1} h(v,1) = \int_{S_2} t_1 \frac{\partial^+}{\partial x_1} g(vt_1,t_2)\,dp = \int_{\{t_2>0\}} \frac{\partial^+}{\partial x_1} g(v\cdot t_1/t_2,1)\,dp_1 .$$

Für die Funktionen G, H, definiert gemäß (3.4) bedeutet das aber

$$H(w) = \int_{\{t_1,t_2>0\}} G(w - \log t_2/t_1)\,dp_1 \quad \text{oder} \quad \eta = \gamma * \pi \,,$$

wobei π die Verteilung von $\log t_2/t_1$ bezüglich p_1 angibt und daher nach dem Beweis zu Lemma 3.1 die gewünschte Eigenschaft (3.3) besitzt.

Gelte umgekehrt eine Beziehung (3.7), wobei π (3.3) genügt. Dann tritt wegen des Corollars zu Lemma 3.1 π als Verteilung von $\log t_2/t_1$ bezüglich p_1 in einer LV p auf. Wir betrachten $\bar{h} := \overset{\vee}{p}(g)$ und wenden den ersten Teil des Beweises auf $\bar{h}$ und g an. Wenn $\bar{\eta}$ vermöge (3.4) aus $\bar{h}$ gewonnen ist, dann gilt

$$\bar{\eta} = \gamma * \pi = \eta ,$$

woraus nach Lemma 3.1 $\bar{h} = h$ folgt, w.z.b.w.

Im Fall $g = g_o$ ließen sich noch alle konkaven Funktionen $h : 0 \leq h \leq g_o$ in der Form $h = \overset{\vee}{p}(g)$ darstellen, während für beliebiges $g \in \mathcal{K}^o$ die Bedingung $0 \leq h \leq g$ nach Lemma 1.3 zwar eine notwendige Folge von (0.1) bildet, die aber keineswegs hinreicht, um die in (0.1) möglichen Funktionen h zu charakterisieren. Dies geht hervor aus dem Beispiel :

Sei $g(x) := \min(x_1, x_2, (x_1+x_2)/3)$, $x \in \mathbb{R}_+^2$. Da $g(\xi,1)$ aus drei linearen Stücken besteht, nimmt die Ableitung drei verschiedene Werte an und γ ist auf zwei Punkte positiver Masse konzentriert. Sei $h(x) := 2/3 \cdot \min(x_1, x_2)$, $x \in \mathbb{R}_+^2$. Dann ist $0 \leq h \leq g$; das zugehörige Maß η ist aber jetzt auf einen Punkt konzentriert, folglich eine Gleichung $\eta = \gamma * \pi$ unmöglich.

Das Problem der Gültigkeit von (0.1) ist durch Satz 3.2 zurückgeführt auf die Frage danach, ob eine endliche Verteilung in $\mathbb{R}$ als Faktor einer anderen endlichen Verteilung (mit der Faltung als Multiplikation) auftritt. Bemerkt sei noch, daß die Bedingung (3.3) für die dabei vorkommenden Verteilungen γ der Bedingung

(3.8) a) $F(0) \leq 1$ b) $F(-i) \leq 1$

an die Fouriertransformierte F_γ von γ, $F_\gamma(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izw}\, d\gamma(w)$, äquivalent ist. (3.8) besagt aber, daß $F_\gamma(z)$ analytisch im Streifen $\{0 > \operatorname{Im} z > -1\}$ ist und stetig in der abgeschlossenen Hülle dieses Streifens.

C. Eindeutigkeitsfragen.

Neben der Frage nach der Beschreibung der in (0.1) bei gegebenem g möglichen Funktionen h läßt sich auch die Frage stellen, inwieweit p in dieser Gleichung durch g und h eindeutig festgelegt ist. Im Fall $n = 2$ läßt sich diese Frage wegen Satz 3.2 darauf zurückführen zu untersuchen, welche Fouriertransformierten F_γ mit (3.8) in der Gleichung

$$F_\eta(z) = F_\gamma(z) \cdot F_\pi(z), \quad 0 > \operatorname{Im} z > -1,$$

eine eindeutige Bestimmung von F_π gestatten. Wegen der Analytizität der vorkommenden Funktionen sind das aber genau alle F_γ, die in einer Umgebung von $z = 0$ nicht verschwinden, d.h. alle F_γ mit $F_\gamma(0) > 0$ oder alle F_γ bis auf $F_\gamma = 0$. Diese Überlegung läßt aber eine Ausweitung auf den Fall $n \geq 2$ zu und sie sei deshalb für den allgemeinen Fall bewiesen. Zuvor wird noch ein Hilfsbegriff eingeführt :

Definition 3.1 : Zu $p \in \mathcal{L}_n$, $n \geq 2$, wird definiert eine Funktion $F_p \mid S_n$, erklärt als

(3.9) $$F_p(u) := \int_S t_1^{u_1} \cdots t_n^{u_n}\, dp(t), \qquad u \in S.$$

Lemma 3.2 : Seien p , q , $r \in \mathcal{L}$; dann folgt aus der Beziehung $p = q \times r$ (vgl. Def. 1.4) $F_p(u) = F_q(u) \cdot F_r(u)$, $u \in S$.

Beweis : Weil der Integrand in (3.9) bei festem u positiv homogen vom Grad 1 in t ist, gilt für beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße μ_i, repräsentiert durch Dichten f_i in einem geeigneten Maßraum $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu})$, $i = 1,\ldots n$, deren LV p ist :

$$F_p(u) = \int_{\Omega} f_1^{u_1} \cdots f_n^{u_n} \, d\tilde{\mu} \quad , u \in S .$$

Wählt man speziell $\Omega = S \times S$, $\tilde{\mu} = q \times r$ und $f_i = t_i^1 \cdot t_i^2$, $i = 1,..n$, so folgt die Behauptung aus Definition 1.4.

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Satz 3.3 aussprechen, der zunächst nur eine Aussage über die Multiplikation von Likelihoodverteilungen darstellt und dann später (Satz 3.4) für Stützfunktionen formuliert wird.

Satz 3.3 : Sei $r \in \mathcal{L}$; zu jedem $q \in \mathcal{L}$ gibt es höchstens ein $p \in \mathcal{L}$ so daß $q = p \times r$, genau dann wenn

$$F_r(u) > 0 , \qquad u \in \overset{\circ}{S} . \tag{3.10}$$

$(\overset{\circ}{S} := \{t \in S : t_i > 0 , i = 1,..n\} , \partial S := S - \overset{\circ}{S})$

Beweis : 1) Aus (3.10) folgt, daß $\min_i t_i$ nicht r-fast überall in S verschwindet; somit erhält man die stärkere Beziehung

$$F_r(u) > 0 , \qquad u \in S . \tag{3.10'}$$

F_p ist daher durch F_q festgelegt (Lemma 3.2), wenn eine Glei-

chung $q = p \times r$ besteht. Es bleibt noch zu zeigen, daß eine LV p durch die Funktion F_p bestimmt ist. In der Tat, sei $u \in \mathring{S}$:

$$(3.11) \qquad F_p(u) = \int_S \prod_j t_j^{u_j} \, dp = \int_S \prod_j t_j^{u_j} \, dp =$$

$$= \int_S \prod_{j \neq k} (t_j/t_k)^{u_j} \, t_k \, dp = \int_{\mathring{S}} \exp(-\sum_{j \neq k} u_j \Lambda_{jk}) \, dp_k$$

$$(\Lambda_{jk} := \log t_j/t_k \,), \quad k = 1,\ldots n.$$

F_p legt also die Verteilung von Λ_{jk}, $j \neq k$, und damit von t_j/t_k, bezüglich p_k in $\mathring{S}$ eindeutig fest, da aus (3.11) ja die Werte der Fouriertransformierten dieser Verteilung F_k [1] in $\{0 > \sum_{j \neq k} \operatorname{Im} z_j > -1 \; ; \; \operatorname{Re} z_j = 0, \; j \neq k\}$ entnommen werden und F_k als analytisch in $\{0 > \sum_{j \neq k} \operatorname{Im} z_j > -1\}$ ausweisen und stetig in der abgeschlossenen Hülle dieses Streifens (Folge von $F_p(u) \leq 1$). Anwendung von Lemma 1.6c zeigt, daß dann p in $\mathring{S}$ festgelegt ist. Dieselbe Betrachtung, angewandt auf die Beschränkung von F_p auf $S^I := \{t \in S : t_i > 0, \; i \in I; \; t_i = 0, \; i \notin I\}$, $I \subset \{1,..n\}$, hilft p in S^I zu bestimmen. Damit ist p eindeutig in $S = \bigcup_{I \neq \emptyset} S^I$ festgelegt und die eine Richtung des Satzes ist bewiesen.

2) Zum Beweis der anderen Richtung konstruieren wir zwei Likelihood-verteilungen p^1 und p^2, so daß

$$(3.12) \qquad p^1 \times r = p^2 \times r$$

für jedes r, das (3.10) verletzt. Zunächst einmal folgt aus

---

1) $F_k(z_1,..z_{k-1},z_{k+1},..z_n) = \int_{\mathring{S}} \exp(i \sum_{j \neq k} z_j \Lambda_{jk}) \, dp_k$, $k = 1,..n.$

$F_r(u) = 0$ für ein $u \in \overset{*}{S}$, daß $\min_i t_i = 0$ r-fast überall in S, d.h. die Masse von r ist auf ∂S konzentriert. Hinreichend für das Bestehen von (3.12) ist nach Lemma 1.4, daß

$$(3.12') \qquad \overset{\vee}{r}(\overset{\vee}{p}^1(a)) = \overset{\vee}{r}(\overset{\vee}{p}^2(a)), \qquad a \in \mathcal{K},$$

gilt (man setze $a = g_o$). Dies ist aber bei auf ∂S konzentriertem r gleichbedeutend mit

$$(3.12'') \qquad (\overset{\vee}{p}^1(a))(x) = (\overset{\vee}{p}^2(a))(x), \qquad a \in \mathcal{K}, \; x \in \partial \mathbb{R}^n_+ .$$

Ich gebe jetzt zwei Likelihoodverteilungen p^1, p^2 an, die (3.12'') erfüllen und damit das gewünschte Beispiel liefern.

Sei die Verteilung in S, die den Punkten t mit $t_{i_1} = t_{i_2} = \ldots = t_{i_m} = 1/m$, $1 \le i_1 < \ldots i_m \le n$, die Masse $m \cdot 2^{1-n}$, $m = 1, \ldots n$, zuerkennt, als p^1 bezeichnet; dann ist $p^1 \in \mathcal{L}$, da

$$\int_S t_i \, dp^1 = \sum_m 2^{1-n} \binom{n-1}{m-1} m/m = 1, \quad i = 1, \ldots n.$$

p^2 trage in den Punkten t mit $t_{i_1} = \ldots t_{i_m} = 1/m$, $1 \le i_1 < \ldots i_m \le n$, die Masse $m \cdot 2^{2-n}$, m gerade. Auch p^2 ist LV, da

$$\int_S t_i \, dp^2 = \sum_{m \text{ ger.}} 2^{2-n} \binom{n-1}{m-1} m/m = 1, \; i = 1, \ldots n.$$

Besitze e_I die Komponenten 1 oder 0, je nachdem ob $i \in I$ oder nicht, $I \subset \{1, \ldots n\}$; dann gilt für $a \in \mathcal{K}$, $x \in \mathbb{R}^n_+$, $x_1 = 0$:

$$(\overset{\vee}{p}^1(a))(x) = \sum_I a(x \circ e_I) \, 2^{1-n} = \sum_{I \subset \{2, \ldots n\}} a(x \circ e_I) \, 2^{2-n},$$

$$(\overset{\vee}{p}^2(a))(x) = \sum_{|I| \text{ ger.}} a(x \circ e_I) \, 2^{2-n} = \sum_{\substack{I \subset \{2, \ldots n\} \\ |I| \text{ ger.}}} a(x \circ e_I) \, 2^{2-n} + \sum_{\substack{I \subset \{2, \ldots n\} \\ |I| \text{ ung.}}} a(x \circ e_I) \, 2^{2-n}.$$

Damit ist (3.12″) bestätigt und der Satz vollständig bewiesen.

Die oben erwähnte andere Formulierung von Satz 3.3 besteht darin, anzugeben, für welche $g \in \mathfrak{K}^0$ der Gestalt $g = \overset{\vee}{r}(g_0)$, wobei r LV, die Gleichung (0.1) eindeutig nach p auflösbar ist. Es gilt, die Bedingung (3.10) in Begriffen von g auszudrücken. Das geschieht in

Satz 3.4 : Sei $g = \overset{\vee}{r}(g_0)$; in der Gleichung $\overset{\vee}{p}(g) = h$ ist p eindeutig bestimmt, genau dann wenn

$$(3.13) \qquad (-1)^n \Delta_0^y g > 0 \quad \text{für ein } y \in \mathbb{R}_+^n .$$

Beweis : Aus der Beziehung für $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\min_i \alpha_i = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \max(\alpha_{i_1}, \ldots \alpha_{i_k}) \quad \text{folgt}$$

$$(3.14) \quad (-1)^n \Delta_0^y g = (-1)^n \Delta_0^y \left[\int_S \left(\sum_i x_i t_i - \max_i x_i t_i \right) dr(t) \right] =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_S \Delta_0^y (\max_i x_i t_i)\, dr = \int_S (\min_i y_i t_i)\, dr.$$

Vermöge dieser Rechnung ist (3.13) äquivalent zu $\min_i t_i > 0$ auf einer Menge positiven r-Maßes und dies wieder ist zu (3.10) äquivalent.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Frage nach der Eindeutigkeit von p in (0.1) wenigstens im Spezialfall $g = \overset{\vee}{r}(g_0)$ eine vollständige Antwort erfahren hat, und zwar für beliebiges $n \geqslant 2$, während die Frage nach der Existenz (und Eindeutigkeit) von p zu gegebenem g und h nur für $n = 2$ einigermaßen gelöst ist.

D. Rückwärtiger Rand des Risikobereichs bei Irrtumsschäden.

An dieser Stelle wird einmal von den bisherigen Betrachtungen abgewichen und die volle Stützfunktion h (bzw. g), nicht nur ihre Einschränkung auf $\mathbb{R}^n_+$ untersucht. Wieder gilt analog zu (0.1)

$$(3.15) \qquad h(x) = (\check{p}(g))(x) := \int_S g(x \circ t)\, dp(t), \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Nun läßt sich im Fall der Irrtumsschäden g $(= g_o)$ auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen $(g_o(x) := \sum_i x_i - \max_i x_i$, $x \in \mathbb{R}^n$, wie es der Definition von $\mathfrak{T}_o$ in (2.1) entspricht), bei Kenntnis von p also das zu g_o gehörige h in ganz $\mathbb{R}^n$ berechnen. Vermöge Satz 2.3 wird aber p durch $h \mid \mathbb{R}^n_+$ festgelegt, somit $h \mid \mathbb{R}^n$ bereits durch seine Beschränkung auf $\mathbb{R}^n_+$. Die Frage ist nun, ob die Einschränkung von h auf $\mathbb{R}^n_-$ ebenfalls ausreicht, um ganz h festzulegen, bzw. ob die konvexe Hülle von $\mathfrak{R}$ bereits durch ihren rückwärtigen Rand bestimmt ist.

Lemma 3.3 : Genau im Fall $n = 2$ sind alle Funktionen der Gestalt $\check{p}(g_o)$ durch ihre Werte in $\mathbb{R}^n_-$ eindeutig bestimmt.

Beweis : Wir betrachten wieder die Funktion

$$(3.16) \qquad h'(x) := \sum_i x_i - h(x) = \int_S \max_i (x_i t_i)\, dp(t), \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Für ihre Einschränkung auf $\mathbb{R}^n_-$ gilt

$$(3.17) \qquad -h'(-x) = \int_S \min_i (x_i t_i)\, dp , \qquad x \geqslant 0 .$$

Bei $n = 2$ folgert man aus (3.17) : $-h'(-x) = h(x)$, $x \geqslant 0$, oder

(3.18) $$h(x) = \sum_i x_i + h(-x), \quad x \geqslant 0,$$

womit p und $h \mid \mathbb{R}^2$ bestimmt sind. Bei $n \geqslant 3$ gibt es aber verschiedene Likelihoodverteilungen, für die etwa $h \mid \mathbb{R}^n_- = 0$; denn es gibt sicher verschiedene Maße in ∂S_n mit Schwerpunkt $(1/n,\ldots 1/n)$ und Masse n, die nach (3.17) hierfür als Beispiel dienen können.

Die Beziehung (3.18) für $n = 2$ bedeutet geometrisch eine Symmetrie von $\mathcal{R}$ bezüglich Spiegelung am Punkt $(1/2,1/2)$. Testtheoretisch rührt diese Symmetrie daher, daß bei zwei Entscheidungsmöglichkeiten zu jeder Entscheidung genau eine "Komplementärentscheidung" getroffen werden kann; zum Test $\delta = (\delta_1,\delta_2)$ betrachte man den Test $(1-\delta_1, 1-\delta_2)$.

§ 4. Sequentielle Verfahren.

Während die bisherigen Problemstellungen alle zu einem einstufigen Entscheidungsproblem gehörten, werde jetzt folgende Situation betrachtet : n Hypothesen mögen in m unabhängigen Versuchen getestet werden, $m \leq \infty$. Jeder Versuch sei mit den konstanten Kosten k_i , i = 1,...n, verbunden, unabhängig vom Versuchsergebnis, abhängig nur davon, welche Hypothese "wahr" ist. Um den Anschluß an die vorigen Paragraphen aber leichter herzustellen, wird vereinbart, die Kosten erst vom zweiten Versuch an zu zählen; so bleibt die Risikofunktion des einstufigen Tests die in den Paragraphen 2 und 3 betrachtete. Das mathematische Modell der Situation besteht aus :

1) einer Menge Ω , einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ von Teilmengen von Ω und den darauf erklärten Wahrscheinlichkeitsmaßen $\tilde{\mu}_1, \ldots \tilde{\mu}_n$;

2) den zufälligen Größen X_m , $m \in \mathbb{N}$, mit Werten etwa in $\mathbb{R}$ ("beobachtete Größen"), unabhängig und identisch verteilt unter jedem einzelnen $\tilde{\mu}_i$, i = 1,..n. Die Verteilung von X_m in $\mathbb{R}$ unter $\tilde{\mu}_i$ sei mit μ_i bezeichnet. Die Maße μ_i mögen in Bezug auf ein geeignetes Maß $\tilde{p}$ die Dichten f_i , i = 1,...n, besitzen ; ihre LV sei als p bezeichnet.

3) der Menge $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+^n$ der Schäden ("Terminalentscheidungen") mit Stützfunktion g , sowie den Versuchskosten pro Stufe k_i , i = 1, ...n; dabei sei $g \in \mathcal{K}^o$ (vgl. Def.2.1) und $k_i \geq 0$, i = 1,..n, vorausgesetzt.

Ein Test δ ist dann ein Paar (T,s), wobei T eine für jedes $\tilde{\mu}_i$ fast überall endliche Stopzeit im Prozeß $\{X_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ [1], $T \geq 1$, und s eine $\tilde{\mathcal{F}}_T$-meßbare Abbildung [2] von Ω nach $\mathcal{Y}$ ist, so daß die Integrale

$$(4.1) \qquad r_i(\delta) := \int_{\Omega} \left[s_i(\omega) + k_i \cdot (T(\omega) - 1) \right] d\tilde{\mu}_i \ , \quad i = 1,..n,$$

existieren. Als Risikovektor wird $r(\delta)$ mit Komponenten $r_i(\delta)$ bezeichnet. Der Test $\delta = (T,s)$ heißt m-stufig, wenn $T \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ oder $m = \infty$, ist.

Gegenstand dieses Paragraphen werden wieder die Stützfunktionen der Risikobereiche $\mathcal{R}_m$ der m-stufigen Tests sein, erklärt als

$$(4.2) \qquad \mathcal{R}_m := \{ r(\delta) : \delta = (T,s) \text{ Test}, \ T \leq m \} \ , \quad m \leq \infty.$$

Die Folge der Mengen $\mathcal{R}_m$ ist natürlich aufsteigend in m. Als die Stützfunktion von $\mathcal{R}_m$ wird wie üblich definiert

$$(4.3) \qquad h_m(x) := \inf_{r \in \mathcal{R}_m} x'r \ , \qquad x \in \mathbb{R}^n_+ \ , \ m \leq \infty.$$

Beim Grenzübergang $m \longrightarrow \infty$ erweist es sich als sinnlos, h auf Argumenten außerhalb $\mathbb{R}^n_+$ zu erklären; denn mit wachsendem m kann auch T und damit r über alle Grenzen wachsen, sofern nicht alle $k_i = 0$, und $\mathcal{R}_\infty$ ist dann nicht mehr beschränkt.

Eine Aussage über das Verhalten von h_m bei $m \longrightarrow \infty$ entnehmen

---

1) d.h. $\{\omega: T(\omega) \leq m\} \in \tilde{\mathcal{F}}_m$, wenn $\tilde{\mathcal{F}}_m$ der von X_1, $1 \leq m$, erzeugte σ-Ring ist, $m \in \mathbb{N}$.

2) d.h. $\{\omega: s(\omega) \leq x, \ T(\omega) \leq m\} \in \tilde{\mathcal{F}}_m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$.

wir [11]:

Lemma 4.1 : $\lim_{m\to\infty} h_m(x) = h_\infty(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+.$

Beweis : Nach [11], S. 161, läßt sich das Risiko eines unendlichstufigen Tests beliebig gut durch das Risiko eines endlichstufigen approximieren. Daher gilt für die Stützfunktionen

$$\lim_{m\to\infty} h_m(x) \le h_\infty(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+ .$$

Eine umgekehrte Abschätzung folgt aus dem monotonen Abnehmen der Funktionenfolge h_m, $m \le \infty$.

Zur Berechnung und Charakterisierung der Funktionen h_m wird nun der in § 1 entwickelte Kalkül etwas erweitert. Daher seien, zu fest vorgegebenem $g \in \mathcal{K}^\circ$ und k_i, $i = 1,..n$, definiert :

Definition 4.1 : a) der in diesem Paragraphen betrachtete Funktionenraum $\mathcal{K}^1$, wobei $a \in \mathcal{K}^1$ bedeute:

(4.4) $\quad a \in \mathcal{K}$; $0 \le a \le g$; $a(x+y) \ge a(x) + a(y)$, $x,y \in \mathbb{R}^n_+$;

b) die "Kostenfunktion" $Q \in \mathcal{K}$, erklärt als

(4.5) $\quad Q(x) := \sum_i k_i x_i , \qquad x \in \mathbb{R}^n_+ .$

c) zu jeder LV p eine Abbildung $\hat{p}$ von $\mathcal{K}^1$ in sich, erklärt durch

(4.6) $\quad \hat{p}(a) := \check{p}(\min(a + Q, g)) , \qquad a \in \mathcal{K}^1.$

Offensichtlich ist, daß das Minimum der konkaven Funktionen $a + Q$

und g ebenfalls konkav und durch g majorisiert ist. Beide Eigenschaften übertragen sich nach Lemma 1.3 auf $\hat{p}(a)$, das damit als Element von $\mathcal{K}^1$ erkannt wird.

Lemma 4.2 :1) a , $b \in \mathcal{K}^1$, $a \leq b$; dann ist $\hat{p}(a) \leq \hat{p}(b)$.

2) $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ aufsteigende (bzw. absteigende) Folge in $\mathcal{K}^1$;

$a(x) = \lim_{i\to\infty} a_i(x)$, $x \in \mathbb{R}^n_+$; $a \in \mathcal{K}^1$; dann gilt

$$(\hat{p}(a))(y) = \lim_{i\to\infty} (\hat{p}(a_i))(y), \qquad y \in \mathbb{R}^n_+ .$$

Beweis : Die erste Behauptung ist trivial, die zweite folgt aus dem Satz über monotone Konvergenz integrabler Funktionen.

Ganz analog zum Vorgehen in [9] betrachtet man die rekursiv definierten Funktionen (zu festem $p \in \mathcal{L}$)

Definition 4.2: a) $\psi_0 := g$,

b) $\psi_m := \hat{p}(\psi_{m-1})$, $m \in \mathbb{N}$.

Wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, werde die Abhängigkeit der ψ_m von p nicht eigens zum Ausdruck gebracht; wir schreiben also hier und in den nächsten Sätzen einfach $\psi_m(x)$ statt etwa $\psi_m(x,p)$. - In dieser Sprechweise ist die Stützfunktion h_m des Risikobereichs $\mathcal{R}_m$ des m-stufigen Tests angebbar als

Satz 4.1 : $h_m = \psi_m$, $m \in \mathbb{N}$,

wenn die LV p von $\mu_1, .. \mu_n$ die in Def. 4.2 verwandte LV ist.

Beweis : Es gilt nur, die in [9], Satz 6, entwickelten Formeln auf

unseren Fall zu spezialisieren. Für die dort, S. 563, definierten Funktionen g_j , l_j gilt mit unseren Bezeichnungen :

(4.7) a) $g_j(\xi_1,..\xi_j;x) = g(x\circ f(\xi_1)\circ\cdots f(\xi_j)) , \quad 1 \le j \le m ;$

b) $l_j(\xi_1,..\xi_j;x) = \int_{\mathbb{R}} \min(g_{j+1},l_{j+1})\, dp(\xi_{j+1}) +$

$+ Q(x\circ f(\xi_1)\circ\cdots f(\xi_j)) , \quad 0 \le j \le m-1 ;$

$l_m = +$.

Aus der Rekursionsformel (4.7 b) folgt unmittelbar, daß l_j von der Form

(4.8) $\qquad l_j(\xi_1,..\xi_j;x) = \tilde{l}_j(x\circ f(\xi_1)\circ\cdots f(\xi_j)) , \quad j = 1,...m,$

ist. Versieht man $\tilde{l}_j$ in Abhängigkeit von der (in [9] fest vorgegebenen) Stufenzahl m mit dem Index m : $\tilde{l}_j^m$, so folgt ebenfalls aus (4.7 b) sowie der Tatsache, daß sämtliche X_j gleich verteilt sind, $\tilde{l}_o^{m-1} = \tilde{l}_1^m$ und außerdem

(4.9) $\qquad \tilde{l}_o^m(x) = \int_{\mathbb{R}} \min\left[g(x\circ f(\xi_1)),\ \tilde{l}_o^{m-1}(x\circ f(\xi_1))\right] d\tilde{p}(\xi_1) + Q(x) .$

Nach dem Corollar zum dortigen Satz 6 ist aber $\tilde{l}_o^m$ die Stützfunktion des Risikobereichs des m-stufigen Problems, mit dem Unterschied, daß dort auch beim ersten Versuch die Kosten gerechnet werden. Berücksichtigt man dies, ergibt sich $h_m = \tilde{l}_o^m - Q$, und die Beziehung (4.9) geht über in

(4.10) $\qquad h_m = \hat{p}(h_{m-1}) , \qquad m \in \mathbb{N} .$

Wegen $\psi_1 = \hat{p}(g) = h_1$ folgt aus (4.10) durch vollständige Induktion nach Definition 4.2 die Behauptung.

Aus der Definition 4.2 werden nun Eigenschaften der Funktionen ψ_m, $m \in \mathbb{N}$, abgeleitet, die in sich von Interesse sind. Die kommenden Sätze und Beweise greifen dabei nicht mehr auf die Deutung $\psi_m = h_m$ zurück, es könnte daher Satz 4.1 wieder vergessen werden. Dieser Satz dient jedoch dazu, die Verbindung zwischen dem in diesem Paragraphen aufgestellten Kalkül und den Stützfunktionen der Risikobereiche $\mathcal{R}_m$, $m \leq \infty$, herzustellen und diesen Kalkül als zur Testtheorie gehörig zu erweisen. In diesem Sinn wird noch einmal - ohne Verwendung von Satz 4.1 - bewiesen das

Lemma 4.3 : Die Folge der Funktionen ψ_m, $m \in \mathbb{N}$, ist absteigend.

Beweis : Es ist $\psi_1 \leq g = \psi_0$, da $\psi_1 \in \mathcal{K}^1$; weiter folgt aus $\psi_m \leq \psi_{m-1}$ nach Lemma 4.2, 1. Behauptung, daß $\psi_{m+1} \leq \psi_m$, womit das Lemma bewiesen ist.

Da die Familie $\{\psi_m , m \in \mathbb{N}\}$, durch 0 nach unten beschränkt ist, existiert der Grenzwert

$$\psi_\infty(x) := \lim_{m \to \infty} \psi_m(x) , \qquad x \in \mathbb{R}^n_+ . \tag{4.11}$$

In Verbindung mit Lemma 4.1 läßt sich dann Satz 4.1 erweitern zu

Satz 4.1' : $h_m = \psi_m$, $m \leq \infty$.

Lemma 4.4 : $p \in \mathcal{L}$; ψ_m nach Def.4.2 und (4.11) erklärt, $m \leq \infty$; dann ist $\psi_\infty \in \mathcal{K}^1$.

Beweis : Es ist $\psi_m \in \mathcal{K}^1$, $m \in \mathbb{N}$. Die Ungleichungen (4.4) bleiben bei $m \longrightarrow \infty$ erhalten. Zu zeigen ist nur noch, daß ψ_∞ stetig ist:

ψ_∞ ist aber halbstetig von oben als Infimum stetiger Funktionen und halbstetig von unten als konkave Funktion.

Das Problem der Charakterisierung der Risikobereiche läßt sich nun im unendlichstufigen Fall lösen, und zwar durch den

Satz 4.2 : $b = \psi_\infty$ ist Lösung der Integralgleichung

$$\hat{p}(b) = b \,. \tag{4.12}$$

Beweis : $\psi_\infty(x) = \lim_{m\to\infty} \psi_m(x) = \lim_{m\to\infty} (\hat{p}(\psi_{m-1}))(x) = (\hat{p}(\psi_\infty))(x)$,

$x \in \mathbb{R}^n_+$, wegen Lemma 4.2, 2. Behauptung.

Wesentlich tiefer liegt der nächste Satz, der aussagt, daß unter einfachen Bedingungen an g und Q (4.12) nur die Lösung $b = \psi_\infty$ besitzt, d.h. daß $\hat{p}$ genau einen Fixpunkt hat. Die Stützfunktionen an $\mathcal{R}_\infty$ sind dann (in Abhängigkeit von p) dadurch ausgezeichnet, daß sie als Fixpunkte eines Operators $\hat{p}$ auftreten.

Satz 4.3 : Es gelte für alle $x \in \mathbb{R}^n_+$ die Implikation

$$Q(x) = 0 \;\Big\rangle\; g(x) = 0 \,. \tag{4.13}$$

Dann ist $b = \psi_\infty$ die einzige Lösung von (4.12).

Beweis : Seien b_1 und b_2 Lösungen von (4.12) und gebe es ein $x \in \mathbb{R}^n_+$, so daß (o.E.d.A.) $b_2(x) > b_1(x)$; dann definiert man

$$\sigma := \sup_{x\in S} (b_2(x) - b_1(x)) \,,$$

wobei $\sigma > 0$. Von der kompakten Menge $C := \{x \in S : b_2(x) - b_1(x) = \sigma\}$ sei $x^o = (x_1^o, \ldots x_n^o)$ der in der lexikographischen Anordnung erste Punkt, d.h.

$$(4.14) \qquad x_1^o = \min_{x \in C} x_1 \,, \quad x_2^o = \min_{x \in C, x_1 = x_1^o} x_2 \,, \quad \text{usw.}$$

Man erhält dann die Abschätzung (vgl. Lemma 1.1) :

$$\sigma = b_2(x^o) - b_1(x^o) = \int_S (\min(g, b_2+Q) - \min(g, b_1+Q))\, dp_x{}^o \leq$$

$$\leq \int_S (b_2 - b_1)^+ dp_x{}^o \leq \sigma \cdot 1 = \sigma .$$

Da sich die rechte und linke Seite hierin aber gleichen, folgt

$$(4.15) \qquad b_2(t) - b_1(t) = \sigma \quad (p_x{}^o\text{-fast überall}), \text{ d.h. } p_x{}^o(C) = 1.$$

Aus (1.14) ergibt sich weiter in Verbindung mit (4.14) und (4.15)

$$x_1^o = \int_S t_1 \, dp_x{}^o = \int_C t_1 \, dp_x{}^o \geq x_1^o \cdot 1 = x_1^o .$$

Wie bei der vorigen Abschätzung schließt man wieder auf

$$(4.16) \qquad p_x{}^o(C \cap \{t_1 = x_1^o\}) = 1$$

Integration über die 2. Koordinate liefert unter Berücksichtigung von (4.16) $p_x{}^o(C \cap \{t_1 = x_1^o, t_2 = x_2^o\}) = 1$; allgemein gilt

$$(4.17) \qquad p_x{}^o(\{t = x^o\}) = 1.$$

Nach Lemma 1.5 folgt daraus für $y \in S_x{}^o$ $(:= \{x \in S : (x_i^o = 0 \Rightarrow x_i = 0)\})$

$$(4.18) \qquad b_j(y) = \min (b_j(y) + Q(y), g(y)), \quad y \in S_x{}^o, \; j = 1,2.$$

Es mögen jetzt zwei Fälle unterschieden werden :

(a) es gibt ein $j \in \{1,2\}$ und $y \in S_x o$, so daß

$$b_j(y) + Q(y) < g(y) ;$$

dann folgt in (4.18) $Q(y) = 0$ und daraus nach (4.13) $g(y) = 0$; nun sind aber b_j und Q als nichtnegativ vorausgesetzt, somit Fall (a) zu einem Widerspruch geführt.

(b) $$b_j(y) + Q(y) \geqslant g(y) , \quad y \in S_x o , \quad j = 1,2 ;$$

es folgt jetzt in (4.18) $b_1(y) = b_2(y)$ $(= g(y))$, $y \in S_x o$, was aber im Widerspruch steht zu unserer Konstruktion, nach der $b_2(x^o) - b_1(x^o) = \sigma > 0$ und $x^o \in S_x o$ war.
Damit ist die Existenz verschiedener Lösungen von (4.12) zu einem Widerspruch geführt und φ_∞ als einzige Lösung nach Satz (4.2) erkannt.

Die Voraussetzung (4.13) über Q und g kann nicht mehr abgeschwächt werden, wie die folgende Umkehrung von Satz 4.3 zeigt :

Satz 4.4 : Es gebe ein $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$, derart daß $g(\bar{x}) > 0$, $Q(\bar{x}) = 0$; dann gibt es eine LV p , für die (4.12) mehr als eine Lösung besitzt.

Beweis : Seien o.E.d.A. $k_i = 0$, $i \leq l$, und $k_i > 0$, $i > l$.
Wir spalten das n-Tupel $x \in \mathbb{R}^n_+$ auf in $x = (x^1, x^2)$, wobei x^1 für die ersten l Komponenten stehe und x^2 für die restlichen.
Nach Voraussetzung ist $l \geqslant 1$.

Wir wählen nun als p eine spezielle LV p^1, definiert dadurch, daß p^1 die Masse 1 in t^1, $t^1_1 = t^1_2 = .. t^1_1 = 1/1$, trägt und, nur falls $1 < n$, noch die Masse $n-1$ in t^2, $t^2_{1+1} = .. t^2_n = 1/n-1$.

Man wählt eine beliebige Funktion $a \in \mathcal{K}^1$ und definiert

$$b(x^1,x^2) := g(0,x^2) + a(x^1,0), \qquad x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{4.19}$$

Wegen $a \in \mathcal{K}^1$ erhält man

$$b(x^1,x^2) \leq g(0,x^2) + g(x^1,0) \leq g(x^1,x^2), \quad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

was b als Element von $\mathcal{K}^1$ ausweist. (Die anderen Bedingungen in (4.4) sind offenbar erfüllt.) Weiter ist für $x \in \mathbb{R}^n_+$:

$$(\hat{p}^1(b))(x) = (\check{p}^1(\min(b + Q, g)))(x) = \min(b(0,x^2)+Q(0,x^2), g(0,x^2))$$

$$+ \min(b(x^1,0)+Q(x^1,0), g(x^1,0)) = g(0,x^2) + a(x^1,0) = b(x).$$

Jedem $a \in \mathcal{K}^1$ entspricht somit eine vermöge (4.19) definierte Lösung b der Integralgleichung (4.12); es gibt aber mindestens zwei verschiedene $a \in \mathcal{K}^1$, die sich in $\{x^2 = 0\}$ unterscheiden und damit zu verschiedenem b führen, nämlich $a = 0$ und $a = g$.

Analog zu den Betrachtungen am Ende von § 2 läßt sich auch im sequentiellen Fall die stetige Abhängigkeit der Funktionen ψ_m, $m \leq \infty$, von der zugrundegelegten LV p untersuchen. Die entsprechenden Räume $\mathcal{K}^1 \subset \mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ seien wieder mit der in den Sätzen 2.4 und 2.5 vorausgesetzten Topologie versehen. - Um die Abhängig-

keit der Funktion ψ_m von der LV p auszudrücken, werde - unkorrekterweise - neben der Schreibweise $\psi_m(x,p)$ auch die Bezeichnung $\psi_m(p)$ verwendet. In diesem letztgenannten Sinn ist ψ_m dann eine Abbildung von $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{K}^1$.

Satz 4.5 : Bei festgewähltem $g \in \mathcal{K}^\circ$ und Q ist die Abbildung $\psi_m : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}^1$, $m \in \mathbb{N}$, stetig.

Beweis : $\psi_1(p) = \check{p}(g)$ zeigt nach Satz 2.4 die stetige Abhängigkeit von ψ_1 von $p \in \mathcal{L}$.
Sei $b(p) := \min (g, \psi_{m-1}(p) + Q)$. Wenn ψ_{m-1} stetig in p ist, so trifft dies auch auf b zu; nach Satz 2.5 ist aber

$$\psi_m(p) = \check{p}(b(p)) = U(p,b(p)) ,$$

wobei U in beiden Argumenten stetig ist. Daraus folgt die Stetigkeit von ψ_m und unsere Behauptung ist durch vollständige Induktion bewiesen.

Um die Stetigkeit von ψ_∞ zu zeigen, ist es wesentlich, auf die Anordnung des Funktionenraums $\mathcal{K}^1$ und die Monotonie des Operators $\hat{p}$, $p \in \mathcal{L}$, zurückzugreifen. Unter der Voraussetzung (4.13) läßt sich nämlich $\psi_\infty(p)$ auch als Grenzfunktion einer aufsteigenden Funktionenfolge $\varphi_m(p)$, $m \in \mathbb{N}$, darstellen, deren einzelne Glieder stetig von p abhängen. ψ_m und φ_m verhelfen dann bei hinreichend großem m zu einer beliebig scharfen oberen und unteren Abschätzung von ψ_∞. Diese Aussagen seien präzisiert zunächst im

Lemma 4.5 : Die zu $p \in \mathcal{L}$ durch folgende Rekursionsformel

$$\varphi_0 := 0 \,, \tag{4.20}$$
$$\varphi_m := \hat{p}(\varphi_{m-1}) \,, \quad m \in \mathbb{N} \,,$$

definierten Funktionen hängen stetig von p ab; die Folge $\{\varphi_m, m \in \mathbb{N}\}$ ist aufsteigend.

Beweis : Die erste Aussage wird wie Satz 4.5 bewiesen, die zweite wie Lemma 4.3, wobei als Angangsbeziehung $\varphi_1 \geq 0 = \varphi_0$ auftritt.

Satz 4.6 : Unter der Voraussetzung (4.13) ist die Abbildung $\psi_\infty : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}^1$ stetig.

Beweis : 1) Wir zeigen zuerst, daß

$$\psi_\infty(x) = \varphi_\infty(x) := \lim_{m \to \infty} \varphi_m(x) \,, \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \,. \tag{4.21}$$

Als Gegenstück zu Satz 4.2, das ebenso zu beweisen ist, hat man $\hat{p}(\varphi_\infty) = \varphi_\infty$, wenn $\hat{p}$ einmal auf nicht notwendig stetige Funktionen a der Eigenschaft $0 \leq a \leq g$, a konkav, ausgedehnt sei. Weiter gilt für jeden Fixpunkt b von $\hat{p}$ in dieser größeren Funktionenklasse

$$\varphi_\infty \leq b \leq \psi_\infty \,;$$

in der Tat, die iterierte Anwendung von $\hat{p}$ auf die Abschätzung $0 \leq b \leq g$ und Grenzübergang beweist dies. Will man nun den Beweis von Satz 4.3 auf $b_2 = \psi_\infty$, $b_1 = \varphi_\infty$, anwenden, so ergibt sich, daß $b_2 - b_1$ halbstetig von oben ist (da φ_∞ halbstetig von unten als konkave Funktion) und somit sein Supremum in S auf

einer kompakten Menge C annimmt. Der Rest des Beweises läßt sich dann wörtlich übertragen und zeigt, daß $\psi_\infty = \varphi_\infty$; nebenbei ergibt sich, daß auch in der weiteren Funktionenklasse $\hat{p}$ nur einen Fixpunkt besitzt.

2) Wir zeigen nun die Stetigkeit von ψ_∞ an der Stelle $p = p'$. Die stetigen Funktionen $\psi_m(x,p')$, $\varphi_m(x,p')$ streben bei $m \longrightarrow \infty$ monoton von oben, bzw. unten, gegen die stetige Funktion $\psi_\infty(x,p')$, nach dem Satz von Dini also gleichmäßig auf S ; d.h. zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $m_o \in \mathbb{N}$, so daß

$$(4.22) \qquad \psi_{m_o}(x,p') \leq \psi_\infty(x,p') + \varepsilon/2 \ ,$$

$$\varphi_{m_o}(x,p') \geq \psi_\infty(x,p') - \varepsilon/2 \ , \qquad x \in S \ .$$

Auf Grund von Satz 4.5 (bzw. Lemma 4.5) gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus $d(p,p') < \delta$ folgt :

$$(4.23) \qquad |\psi_{m_o}(x,p') - \psi_{m_o}(x,p)| \leq \varepsilon/2 \ ,$$

$$|\varphi_{m_o}(x,p') - \varphi_{m_o}(x,p)| \leq \varepsilon/2 \ , \qquad x \in S \ .$$

In Verbindung mit (4.22) bedeutet das weiter

$$(4.24) \qquad \psi_{m_o}(x,p) - \varepsilon \leq \psi_\infty(x,p') \leq \varphi_{m_o}(x,p) + \varepsilon \ , \ x \in S \ .$$

Wegen der Monotonie der Folgen $\{\psi_m\}$ und $\{\varphi_m\}$ bleibt (4.24) aber gültig, wenn man in der rechten und linken Abschätzung den Index m_o durch ∞ ersetzt. Dann ist jedoch $\|\psi_\infty(p) - \psi_\infty(p')\| \leq \varepsilon$ und damit die Stetigkeit von ψ_∞ an der Stelle p' gezeigt.

Der Beweis dieses Satzes macht wesentlichen Gebrauch von der Tatsache, daß unter der Voraussetzung (4.13) $\varphi_\infty(p) = \varphi_\infty(p)$, $p \in \mathcal{L}$, ist. Analog zu Satz 4.4 kann man auch hier zeigen, daß, sobald die Voraussetzung (4.13) verletzt ist und von der Gleichheit (4.21) kein Gebrauch mehr gemacht werden kann, die Aussage von Satz 4.6 falsch wird.

Satz 4.7 : Unter den Voraussetzungen von Satz 4.4 ist die Abbildung $\varphi_\infty : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}^1$ unstetig.

Beweis : 1) Es seien die gleichen Verabredungen wie zu Beginn des Beweises von Satz 4.4 getroffen. Wir zeigen das unstetige Verhalten von φ_∞ an der Stelle p^1, wobei p^1 ebenso wie im dortigen Beweis definiert sei. Mit Hilfe der speziellen LV p^o, die die Masse 1 in e_i, $i = 1,..n$, trage, definiert man eine Familie $\{p^\alpha : 0 \le \alpha \le 1\}$ von Likelihoodverteilungen durch

$$p^\alpha := \alpha\, p^1 + (1 - \alpha)\, p^o , \qquad 0 \le \alpha \le 1 .$$

Aus $(p^o(g_o))(x) = \sum_i g_o(e_i)\, x_i = 0$ folgt einmal, daß

$$\overset{\vee}{p}{}^\alpha(b) = \alpha\, \overset{\vee}{p}{}^1(b) , \quad 0 \le b \le g_o,\ 0 \le \alpha \le 1 , \tag{4.25}$$

und, wenn man in (4.25) $b = g_o$ setzt, daß p^α stetig von α abhängt.

2) Wir berechnen $\varphi^\alpha(x^1) := \varphi_\infty(x^1, 0; p^\alpha)$, $x^1 \in \mathbb{R}_+^1$.

a) $\alpha = 1$: Alle Fixpunkte von $\hat{p}^1$ sind in $\{x^2 = 0\}$ natürlich durch $g(\,.\,,0)$ majorisiert; umgekehrt ist aber die Funkti-

on b', $b'(x) := g(x^1,0) + g(0,x^2)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, nach Satz 4.4 ein Fixpunkt von $\hat{p}^1$ und somit nach dem ersten Teil des Beweises zu Satz 4.6 durch $\psi_\infty(p^1)$ majorisiert; insgesamt gilt also

$$g(x^1,0) \geqslant \psi_\infty(x^1,0;p^1) \geqslant g(x^1,0) \ , \ x^1 \in \mathbb{R}_+^1 \ , \quad \text{oder}$$

$$\psi^1(x^1) = g(x^1,0) \ , \ x^1 \in \mathbb{R}_+^1 \ . \tag{4.26}$$

b) $\underline{\alpha < 1}$: Eine notwendige Bedingung für ψ^α liefert Satz 4.2:

$$\psi^\alpha(x^1) = (\check{p}^\alpha(\min(g, \psi_\infty(p^\alpha) + Q)))(x^1,0) =$$

$$= \alpha\cdot(\check{p}^1(\min(g, \psi_\infty(p^\alpha) + Q)))(x^1,0) = (\text{da } Q(.,0) = 0)$$

$$= \alpha\cdot(\psi_\infty(p^\alpha))(x^1,0) = \alpha\cdot\psi^\alpha(x^1) \ , \quad x^1 \in \mathbb{R}_+^1 \ ,$$

woraus wegen $\alpha < 1$ geschlossen wird auf

$$\psi^\alpha(x^1) = 0 \ , \quad x^1 \in \mathbb{R}_+^1 \ . \tag{4.27}$$

Nach Voraussetzung war aber $g(.,x)$ nicht identisch Null; daher ziehen (4.26) und (4.27) zusammen die Unstetigkeit von ψ_∞ nach sich.

Wie man sieht, spielt die Bedingung (4.13) für die Charakterisierung der Risikofunktion $h_\infty = \psi_\infty$ eine besondere Rolle. Sie erweist sich einmal als notwendig und hinreichend dafür, daß der Operator $\hat{p}$ für alle $p \in \mathcal{L}$ genau einen Fixpunkt, nämlich $\psi_\infty(p)$, besitzt, zum anderen hängt sie eng mit dem stetigen Verhalten eben dieses Fixpunkts in Bezug auf p zusammen.

Im Fall $n = 2$, dessen besondere Rolle schon in § 3 in Erscheinung trat, lassen sich die Sätze 4.2 und 4.3 noch dahingehend weiterführen, daß p durch $\psi_\infty(p)$ im allgemeinen eindeutig bestimmt ist. Vorausgesetzt sei wieder (4.13); dann werden die Fälle unterschieden :

a) $g = 0$; hier ist $\psi_\infty(p) = 0$, $p \in \mathcal{L}$. Schaltet man diesen trivialen Spezialfall aus, bleibt

b) $g(x) > 0$, $x \in \mathring{\mathbb{R}}^2_+$ (wegen $g(e_1) = g(e_2) = 0$ und Konkavität von g die Negation zu a)); (4.13) bedingt jetzt $k_1 + k_2 > 0$, d.h. $Q(x) > 0$, $x \in \mathring{\mathbb{R}}^2_+$.

Soviel sei gesagt, um die Voraussetzung im folgenden Satz zu motivieren.

Satz 4.8 : Sei $n = 2$, $g \neq 0$, $Q \neq 0$; dann gibt es zu $a \in \mathcal{K}^1$ höchstens eine LV p , so daß $a = \hat{p}(a)$.

Beweis : Da jetzt der Fall b) der obigen Unterscheidung zutrifft, erhält man für $b := \min(a + Q, g)$ die Beziehung

$$b(x) > 0 \ , \ x \in \mathring{\mathbb{R}}^2_+ \ , \tag{4.28}$$

die wegen $0 \leq b \leq g \leq g_o$, d.h. $b \in \mathcal{K}^o$, gleichbedeutend ist mit

$$(-1)^2 \ \Delta_o^x \, b > 0 \ , \ x \in \mathring{\mathbb{R}}^2_+ \ . \tag{4.28'}$$

Daraus folgt aber nach Satz 3.4 die Eindeutigkeit von p .

Literaturverzeichnis.

[1] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Ch. IX. 2. Auflage. Paris 1958.

[2] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques, Ch. III - V. Paris 1955.

[3] HAUPT, O., AUMANN, G. und PAUC, C.: Differential- und Integralrechnung, Bd. 2. Berlin 1950.

[4] KARLIN, S.: The Theory of infinite Games. Reading, London 1959.

[5] LEHMANN, E.L.: Testing Statistical Hypotheses. New York, London 1959.

[6] LOÈVE, M.: Probability Theory. 3. Auflage. Toronto, New York, London 1963.

[7] MINKOWSKI, H.: Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2. Leipzig, Berlin 1911.

[8] NEVEU, J.: Bases mathématiques du calcul des probabilités. Paris 1964.

[9] RICHTER, H.: Über optimale mehrstufige Tests. Transactions 2nd Prague Conf. Information Theory, statistical Decision Functions, Random Processes, Liblice June 1 to 6, 1959, S. 557 - 568.

[10] RICHTER, H.: Endlichstufige Tests mit abhängigen Beobachtungen. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2(1963), 22 - 32.

[11] RICHTER, H.: Optimale Sequenzwiederholungstests. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 5(1966), 156 - 166.

[12] RICHTER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York 1966.

[13] WALD, A.: Sequential Analysis. New York, London 1947.

[14] WALD, A.: Statistical Decision Functions. New York, London 1950.

[15] WALD, A. und WOLFOWITZ, J.: Bayes Solutions of sequential decision problems. Annals Math. Statistics 21(1950), 82 - 99.

Lebenslauf.

Ich wurde am 18. April 1940 in Augsburg geboren. Von 1946 bis 1949 besuchte ich die Volksschule in Schrobenhausen(Obb.). Auf der Höheren Schule war ich in Schrobenhausen, Augsburg (Humanistisches Gymnasium bei St. Stephan) und München (Maximilians-Gymnasium), wo ich im Juli 1958 die Reifeprüfung ablegte. Von 1958 bis 1964 studierte ich an der Universität München Mathematik und Physik bis zur Lehramtsprüfung. Ich hörte u.a. Vorlesungen von F. Bopp, A. Faessler, E. Heinz, M. Kneser, M. Koecher, H. Richter, W. Rollwagen, A. Schlüter, K. Seebach, W. Stegmüller und K. Stein. Seit Oktober 1963 bin ich Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität München.